

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie.** Qu'on se le dise.

Exercice 1 (CCP 1998 — PC — Maths 1, Problème 1)

► On note \mathcal{E} le \mathbb{R} -e.v. des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Q1 Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ un élément quelconque de \mathcal{E} . Exprimez M^2 en fonction de I , M , $\text{tr}(M)$ et $\det(M)$.

► Soient a , b et c trois réels ; on suppose $b \neq 0$. On note $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & c \end{pmatrix}$. On note \mathcal{F} l'ensemble des éléments de \mathcal{E} qui commutent avec A : $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} \mid AM = MA\}$.

Q2 Justifiez *très rapidement* l'affirmation suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n appartient à \mathcal{F} .

Q3 Montrez que \mathcal{F} est un s.e.v. de \mathcal{E} .

Q4 Montrez que (I, A) est une base de \mathcal{F} .

Q5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifiez *très rapidement* l'existence de deux réels α_n et β_n tels que $A^n = \alpha_n I + \beta_n A$.

Q6 Explicitez α_2 et β_2 en fonction de a , b et c .

Q7 Que peut-on dire de A lorsque $\alpha_2 = 0$?

Q8 Déterminez une relation de récurrence entre α_n , α_{n+1} et α_{n+2} .

Q9 Donnez l'expression de α_n en fonction de n lorsque $a = 3$ et $b = c = -2$.

Q10 Donnez l'expression de α_n en fonction de n lorsque $a = 3$ et $b = c = 1$.

Q11 Montrez que \mathcal{F} , muni de l'addition et de la multiplication des matrices, est un anneau commutatif.

Q12 Déterminez, en fonction de α_2 et β_2 , deux réels λ et μ tels que $\det(xI + yA) = (x + \lambda y)^2 + \mu y^2$ pour tout couple de réels (x, y) .

Q13 Donnez alors une condition nécessaire et suffisante portant sur α_2 et β_2 pour que l'anneau \mathcal{F} soit un corps.

Q14 Dans cette question, on suppose que l'anneau \mathcal{F} est un corps. Résolvez dans \mathcal{F} l'équation $X^2 = -I$; notez bien que X désigne ici une « inconnue », et non un certain polynôme unitaire de degré 1 !

► On note u l'endomorphisme de \mathcal{E} défini par $u(M) = AM$.

Q15 Montrez que \mathcal{F} est stable par u .

Q16 Montrez que u est un automorphisme de \mathcal{E} si et seulement si A est inversible.

Q17 On suppose A inversible. Montrez que u induit un automorphisme \hat{u} de \mathcal{F} .

► On note $\mathcal{B} = (\Omega_{1,1}; \Omega_{1,2}; \Omega_{2,1}; \Omega_{2,2})$ la base canonique de \mathcal{E} ; on rappelle que la matrice $\Omega_{i,j}$ est définie par $(\Omega_{i,j})_{\ell,k} = \delta_{i,\ell} \delta_{j,k}$ quels que soient ℓ et k appartenant à $\llbracket 1,2 \rrbracket$.

Q18 Explicitez la matrice de \hat{u} dans la base \mathcal{B} .

Exercice 2

Q1 Rappelez la définition d'un produit scalaire.

- ▶ On identifie le polynôme P et la fonction polynôme \tilde{P} qui lui est associée, et que l'on notera donc P tout simplement.
- ▶ On définit une application φ de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans \mathbb{R} par :

$$\varphi(P, Q) = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + \int_{-1}^1 P''(t)Q''(t) dt$$

Q2 Prouvez que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q3 Montrez que le s.e.v. \mathcal{P} constitué des polynômes pairs, et le s.e.v. \mathcal{I} constitué des polynômes impairs, sont supplémentaires orthogonaux.

- ▶ On note $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, et A la matrice dans \mathcal{B} du produit scalaire φ . Les lignes et les colonnes de A seront indexées à partir de 0 (et non à partir de 1).

Q4 Combien A a-t-elle de lignes ? Combien de colonnes ?

Q5 Explicitez le terme générique $A_{i,j}$ de A .

Q6 Dans cette question uniquement, on suppose $n = 3$. Explicitez la matrice A .

Q7 Prouvez *rapidement* que A est inversible.

- ▶ On note \mathbf{H} le s.e.v. constitué des polynômes qui sont orthogonaux au polynôme 1, et s la réflexion autour de \mathbf{H} .

Q8 Quelle est la dimension de \mathbf{H} ?

Q9 Donnez une base *très simple* de \mathbf{H} .

Q10 Explicitez la matrice de s dans \mathcal{B} . Ici encore, vous indexerez les lignes et les colonnes à partir de 0.

Q11 Quelle est la trace de s ?