

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie.** Qu'on se le dise.

### Exercice 1 (d'après un fragment d'une épreuve du CCC 1998)

- ▶ Soient  $\mathbb{K}$  un corps et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Notons  $\mathbf{E}$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ , à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .  $I_n$  désigne la matrice identité d'ordre  $n$ . Pour  $i$  et  $j$  appartenant à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , nous noterons  $\Omega_{i,j}$  la matrice définie par  $(\Omega_{i,j})_{\ell,k} = \delta_{i,\ell} \delta_{j,k}$  quels que soient  $\ell$  et  $k$  appartenant à  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

**Q1** Énoncez et démontrez la formule donnant une expression simple de  $\Omega_{i,j} \times \Omega_{\ell,k}$ .

- ▶ Notons  $\text{tr}(A)$  la trace de la matrice  $A \in \mathbf{E}$  :  $\text{tr}(A) = \sum_{1 \leq i \leq n} A_{i,i}$ . Nous savons que la trace est une forme linéaire non nulle sur  $\mathbf{E}$ .

**Q2** Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathbf{E}$ . Démontrez la relation  $\text{tr}(A \times B) = \text{tr}(B \times A)$ .

**Q3** Notons  $\mathbf{H}$  l'ensemble des éléments de  $\mathbf{E}$  dont la trace est nulle. Montrez que  $\mathbf{H}$  est un s.e.v. de  $\mathbf{E}$  ; quelle est sa dimension ?

**Q4** Notons  $\mathbf{D} = \{k I_n \mid k \in \mathbb{K}\}$  l'ensemble des matrices scalaires. Montrez que  $\mathbf{D}$  est un s.e.v. de  $\mathbf{E}$  ; quelle est sa dimension ?

**Q5** Montrez que  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{D}$  sont supplémentaires l'un de l'autre.

- ▶ Désormais,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ . Définissons  $\varphi : (A, B) \in \mathbf{E}^2 \mapsto \text{tr}({}^t A \times B)$ .

**Q6** Prouvez que  $\varphi$  est un produit scalaire.

- ▶  $(\mathbf{E}, \varphi)$  est donc un espace euclidien.
- ▶ Notons  $\mathcal{T}$  la transposition :  $\mathcal{T}(A) = {}^t A$  ; nous savons que  $\mathcal{T}$  est un automorphisme involutif de  $\mathbf{E}$ .

**Q7** Montrez que  $\mathcal{T}$  est un automorphisme orthogonal de  $\mathbf{E}$ . Interprétez géométriquement.

- ▶ Désormais,  $n = 2$  ; donc  $\mathbf{E}$  désigne le  $\mathbb{R}$ -e.v. des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels. Nous noterons  $\mathcal{B} = (\Omega_{1,1}; \Omega_{1,2}; \Omega_{2,1}; \Omega_{2,2})$  la base canonique de  $\mathbf{E}$ .

**Q8** Déterminez la matrice  $M$  de  $\varphi$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Q9**  $\mathcal{B}$  est-elle orthonormée, pour le produit scalaire  $\varphi$  ?

**Q10** Déterminez la matrice dans  $\mathcal{B}$  de  $\mathcal{T}$ .

**Q11** Quelle est la trace de  $\mathcal{T}$  ?

**Q12** Montrez que les s.e.v.  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{D}$  sont supplémentaires orthogonaux.

**Q13** Déterminez la matrice dans  $\mathcal{B}$  de la projection orthogonale  $\pi_{\mathbf{H}}$  sur  $\mathbf{H}$ .

**Q14** Montrez que  $\mathcal{T}$  commute avec la projection orthogonale  $\pi_{\mathbf{D}}$  sur  $\mathbf{D}$ .

- ▶ Notons  $\mathcal{N}$  la norme associée à  $\varphi$  :  $\mathcal{N}(A) = \sqrt{\varphi(A, A)}$  pour  $A \in \mathbf{E}$ .

**Q15** Soit  $A \in \mathbf{E}$ . Combien vaut  $\mathcal{N}(A)$  si  $A$  est orthogonale ?

**Q16** Soient  $A$  et  $B$  deux éléments de  $\mathbf{E}$ . Démontrez l'inégalité  $\mathcal{N}(A \times B) \leq \mathcal{N}(A)\mathcal{N}(B)$ .

**Tournez S.V.P.**

## Exercice 2 (Concours commun HEC/ESCP/ESCL voie technologique 1998)

► Notons  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto (x^2 + x + 1)e^{-x/3}$ . Nous noterons indifféremment  $e^{-x/3}$  ou  $\exp\left(-\frac{x}{3}\right)$ .

**Q1** Explicitez  $f'(x)$ .

**Q2** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Justifiez l'existence de trois réels  $a_p, b_p$  et  $c_p$  tels que  $f^{(p)}(x) = (a_p x^2 + b_p x + c_p)e^{-x/3}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Vous exprimerez  $a_{p+1}, b_{p+1}$  et  $c_{p+1}$  en fonction de  $a_p, b_p$  et  $c_p$ .

► Considérons les trois matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 2 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix}$$

**Q3** Calculez  $N^2$  et  $N^3$ , puis exprimez  $A, A^2$  et  $A^3$  en fonction de  $I, N$  et  $N^2$ .

**Q4** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Explicitez  $A^p$  en fonction de  $I, N$  et  $N^2$ .

**Q5** Montrez que  $A$  est inversible et précisez son inverse.

**Q6** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Justifiez l'égalité  $A^p \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p \\ b_p \\ c_p \end{pmatrix}$ .

**Q7** Donnez alors l'expression de  $f^{(p)}(x)$  en fonction de  $p$  et de  $x$ .

**Q8** Énoncez la formule de LEIBNIZ, avec ses conditions d'application. On ne demande pas de démonstration !

**Q9** Avec cette formule, retrouvez le résultat de la question 7.

**Q10** Montrez qu'il existe un et un seul triplet  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de réels tel que l'application  $g : x \in \mathbb{R} \mapsto (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x/3}$  vérifie  $g'' = f$  ; bien entendu, vous explicitez ce triplet.

**Q11** Déterminez alors les fonctions  $h \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  vérifiant  $h'' = f$ .