Sup PCSI2 — Contrôle 1999/08

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. Dans la partie 3, seule la dernière question utilise un résultat établi dans la partie 1.

Partie 1

► Pour $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.

Q1 Déterminez un réel a tel que $\int_0^\pi at^2 \cos nt \, dt = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Vous justifierez *soigneusement* chaque intégration par parties.

Q2 Exprimez la somme S_n au moyen d'une intégrale.

Q3 Pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, établissez l'égalité : $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \cos kt = \frac{\sin \frac{(2n+1)t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$.

► On considère la fonction g définie par $g(t) = \frac{t^2}{\sin \frac{t}{2}}$ pour $t \in \left]0, \pi\right]$ et $g(0) = 0$.

Q4 Montrez que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Q5 Vérifiez alors que : $S_n = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi g(t) \sin \frac{(2n+1)t}{2} \, dt$.

► Dans les deux questions suivantes, h désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0, \pi]$, à valeurs réelles.

Q6 Justifiez l'existence du réel $M(h') = \sup_{0 \leqslant t \leqslant \pi} \left|h'(t)\right|$.

Q7 Au moyen d'une intégration par parties *soigneusement* justifiée, établissez la majoration suivante :

$$\left| \int_0^\pi h(t) \sin \frac{(2n+1)t}{2} \, dt \right| \leqslant \frac{2\left|h(0)\right|}{2n+1} + \frac{2\pi M(h')}{2n+1}$$

Q8 Déterminez alors la limite de la suite $(S_n)_{n \geqslant 1}$.

► Pour $n \geqslant 1$, on note $T_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k^2}$.

Q9 Justifiez *rapidement* la convergence de cette suite.

Q10 Déduire du résultat de la question 8 la limite de la suite de terme général T_n.

Q11 Déterminez enfin la limite de la suite de terme général $U_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

Tournez S.V.P.

Partie 2

► On note $f : x > 0 \mapsto \dfrac{x \ln x}{x+1}$ et C_f la courbe représentative de f.

$\boxed{\text{Q12}}$ Déterminez la limite ℓ de f à droite de 0. On suppose dans la suite que f a été prolongée par continuité, en définissant $f(0) = \ell$.

$\boxed{\text{Q13}}$ f est-elle dérivable à droite de 0 ?

$\boxed{\text{Q14}}$ Montrez que l'équation $x + 1 + \ln x = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+^*$. On notera α cette solution ; précisez la valeur de $\lfloor \alpha \rfloor$.

$\boxed{\text{Q15}}$ En utilisant l'encadrement $2 < e < 3$, déterminez la place de α par rapport à $1/2$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Étudiez les variations de f ; précisez l'allure de la courbe, au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{\text{Q17}}$ Déterminez les points d'intersection de C_f et de la droite D d'équation $x + y = 0$.

$\boxed{\text{Q18}}$ Tracez C_f, en choisissant pour unité 2 cm. Vous ferez apparaître la droite D.

$\boxed{\text{Q19}}$ Donnez le développement limité à l'ordre 3 de f au voisinage de 1.

Partie 3

$\boxed{\text{Q20}}$ Justifiez l'existence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

► Pour $k \geqslant 1$, on note f_k la fonction définie par $f_k(x) = x^k \ln x$ pour $x > 0$, et $f_k(0) = 0$.

$\boxed{\text{Q21}}$ Quelle est la classe de f_1 ?

► On désire calculer $I_1 = \displaystyle\int_0^1 f_1(t)\,dt$.

$\boxed{\text{Q22}}$ L'étudiant Jean-Maurice Malhabile affirme qu'il y parviendra au moyen d'une intégration par parties. Qu'en pensez-vous ?

$\boxed{\text{Q23}}$ Soit $x \in]0,1]$. Justifiez la relation $I_1 = \displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt - \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{x^2}{4}$.

$\boxed{\text{Q24}}$ Justifiez l'existence d'une constante $K > 0$ telle que $\left| \displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt \right| \leqslant Kx$ pour tout $x \in [0,1]$.

$\boxed{\text{Q25}}$ Déterminez alors la valeur de I_1.

$\boxed{\text{Q26}}$ Pour $k \geqslant 2$, montrez que f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ et explicitez sa dérivée à l'aide de f_{k-1}.

$\boxed{\text{Q27}}$ Pour $k \geqslant 2$, calculez $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(t)\,dt$.

$\boxed{\text{Q28}}$ Justifiez la majoration suivante : $\left| J - \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} I_k \right| \leqslant \frac{M(f)}{n+1}$.

$\boxed{\text{Q29}}$ Explicitez alors la valeur de J.