Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : complexité d'une liste

► Soient n et k deux naturels non nuls. Une (n,k)-liste est un n-uplet d'éléments de l'intervalle discret $[\![1,k]\!]$; on peut donc la considérer comme une application de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,k]\!]$. Par exemple, $\ell = (3,2,8,2)$ est une $(4,10)$-liste, avec $\ell_1 = 3$, $\ell_2 = \ell_4 = 2$ et $\ell_3 = 8$.

► On notera que toute (n,k)-liste est aussi une (n,k')-liste pour $k' > k$. On notera également que, dans une (n,k)-liste, un même élément peut apparaître plusieurs fois.

► Soit $\ell = (\ell_1,\ldots,\ell_n)$ une (n,k)-liste. Soient p et q deux naturels qui vérifient $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n$. On note $\ell[p..q]$ la liste obtenue en « effaçant » de ℓ les termes d'indice strictement inférieur à p (s'il y en a) et ceux d'indice strictement supérieur à q (s'il y en a). Par exemple, si $\ell = (2,1,7,3,6,7)$ alors $\ell[3..5] = (7,3,6)$.

► Soit $n' \in [\![1,n]\!]$ et $k' \in [\![1,k]\!]$. Soit m une (n',k')-liste. Nous dirons que m est une sous-liste de ℓ s'il existe des indices p et q tels que $m = \ell[p..q]$. Remarquons que ℓ est une sous-liste de ℓ, puisque $\ell = \ell[1..n]$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Énumérez les sous-listes de $\ell = (2,2,4,2,4)$. Indication : vous devez en trouver onze au total !

► La complexité d'une (n,k)-liste ℓ est le nombre $C(\ell)$ de ses sous-listes.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que la complexité d'une (n,k)-liste est au moins égale à n.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit $n \geqslant 1$. Il existe une et une seule $(n,1)$-liste : elle est définie par $\ell_i = 1$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Calculez $C(\ell)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soient $n \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$. Soit ℓ une (n,k)-liste non constante ; on ne restreint pas la généralité en supposant $\ell_1 = 1$. Notons i le plus petit indice tel que $\ell_i \neq 1$. Montrez que la complexité de ℓ est au moins égale à $2n - i + 1$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Quelles sont les (n,k)-listes de complexité égale à n ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que la complexité d'une (n,n)-liste est au plus égale à $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Soit $n \geqslant 1$. Combien existe-t-il de (n,n)-listes formées d'éléments deux à deux distincts ? Montrez qu'elles ont toutes la même complexité, que vous calculerez.

$\boxed{\text{Q8}}$ Soit $n \geqslant 2$. On note ℓ la $(n,2)$-liste définie par $\ell_i = 1$ pour $i \in [\![1,n-1]\!]$ et $\ell_n = 2$. Calculez sa complexité $C(\ell)$.

► Soit $n \geqslant 3$ et $k \geqslant 2$. On se propose de prouver qu'il n'existe aucune (n,k)-liste de complexité comprise entre $n+1$ et $2n-2$ inclus. Pour ce faire, nous allons considérer une (n,k)-liste ℓ non constante ; on ne restreint pas la généralité en supposant $\ell_1 = 1$. Notons i le plus petit indice tel que $\ell_i \neq 1$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que les sous-listes de ℓ de la forme $\ell[p..q]$ avec $p \leqslant i \leqslant q$ sont deux à deux distinctes. On notera $\mathcal{A}$ leur ensemble. Quel est le cardinal de $\mathcal{A}$?

$\boxed{\text{Q10}}$ Soit $p \in [\![1,i-1]\!]$. Montrez que la sous-liste $\ell[1..p]$ de ℓ n'appartient pas à $\mathcal{A}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Démontrez l'inégalité $C(\ell) \geqslant -i^2 + (n+2)i - 1$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Et maintenant, concluez !

► Nous dirons qu'un naturel q est n-réalisable s'il existe une (n,n)-liste de complexité q.

$\boxed{\text{Q13}}$ Pour chaque $n \in [\![1,4]\!]$, déterminez les naturels qui sont n-réalisables.

Exercice 2 (d'après une question du concours E3A 1999)

► On note $f : x > 0 \mapsto x^x$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Justifiez l'affirmation suivante : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Explicitez $f'(x)$, puis $f''(x)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que f est prolongeable par continuité à droite de 0. On notera encore f la fonction ainsi prolongée.

$\boxed{\text{Q4}}$ f est-elle dérivable à droite de 0 ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Étudiez rapidement les variations de f, puis tracez sa courbe représentative.

► Pour $n \geqslant 0$, on note $a_n = \dfrac{f^{(n)}(1)}{n!}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Calculez a_0, a_1 et a_2.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre très simple.

$\boxed{\text{Q8}}$ Pour $k \geqslant 1$ et $x > 0$, démontrez la formule $\dfrac{d^k}{dx^k}(\ln x) = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Énoncez la formule de Leibniz. On ne demande pas de démonstration !

$\boxed{\text{Q10}}$ Pour $n \geqslant 1$, établissez la relation $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(a_n - \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{(-1)^k a_{n-k}}{k}\right)$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Utilisez cette formule pour calculer a_3, a_4 et a_5.

$\boxed{\text{Q12}}$ Montrez que $|a_n| \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que l'on a même $|a_n| < 1$ pour $n \geqslant 3$.

$\boxed{\text{Q14}}$ On note $H_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}$. Montrez que $|a_{n+1}| \leqslant \dfrac{1 + H_n}{n+1}$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Quelle est la limite de la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$?

Exercice 3 : projecteurs

► Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On rappelle qu'un *projecteur* de E est un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. On sait que, si p est un projecteur de E, alors $E = (\ker p) \oplus (\operatorname{im} p)$, et $\operatorname{im} p$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont invariants sous l'action de p.

► Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. On note $r = p \circ q - q \circ p$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que $p \circ q$ est un projecteur si et seulement si $r(\operatorname{im} q) \subset \ker p$.

► On suppose désormais que $p \circ q$ est un projecteur.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $\operatorname{im}(p \circ q) = \big((\ker p) + (\operatorname{im} q)\big) \cap \operatorname{im} p$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que $\ker(p \circ q) = q^{-1}(\ker p)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que $\ker(p \circ q) = \big((\ker p) \cap (\operatorname{im} q)\big) \oplus (\ker q)$.