

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourrent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie.** Qu'on se le dise.

### Exercice 1 (ENSAM MP 1998)

► Pour  $n \geq 1$ , on note  $f_n : x \in [0, \pi] \mapsto x^n \sin x$ .

Q1 Explicitez  $f'_n(x)$  et montrez que  $f'_n(x) > 0$  pour  $0 < x \leq \pi/2$ .

Q2 On note  $g_n : x \in [\pi/2, \pi] \mapsto x^{1-n} f'_n(x)$ . Explicitez  $g'_n(x)$  et montrez que  $g'_n(x) < 0$  pour  $\pi/2 < x \leq \pi$ .

Q3 Déduisez des résultats précédents le tableau des variations de  $f_n$ , et prouvez l'existence de  $a_n \in ]0, \pi[$  tel que  $f_n$  soit strictement croissante sur  $[0, a_n]$  et strictement décroissante sur  $[a_n, \pi]$ .

Q4 Déterminez le signe de  $g_{n+1}(a_n)$  ; quel est le sens de variation de la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  ?

Q5 Prouvez que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  converge.

Q6 Déterminez la limite  $\ell$  de la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

Q7 On note  $x_n = \ell - a_n$ . Donnez un équivalent *simple* de  $x_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Q8 Quelle est la limite de  $f_n(a_n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?

► Pour  $n \geq 1$ , on note  $J_n = \int_0^\pi f_n(x) dx$ .

Q9 Calculez  $J_1$  et  $J_2$ .

Q10 Avec deux intégrations par parties successives, obtenez une relation exprimant  $J_{n+2}$  en fonction de  $J_n$ .

Q11 Utilisez cette relation pour déterminer les valeurs de  $J_3$  et  $J_4$ .

Q12 Quelle est la limite de la suite  $(J_n)_{n \geq 1}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?

### Exercice 2 (d'après une question de l'oral CCC PSI 1999)

Q1 Au moyen de deux intégrations par parties, calculez la valeur de  $J = \int_0^1 e^t \cos t dt$ .

Q2 Déterminez la limite de la suite de terme général  $K_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \exp\left(\frac{k+1}{n}\right) \cos\left(\frac{k}{n}\right)$ .

Q3 Déterminez la limite de la suite de terme général  $L_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \exp\left(\frac{k}{n}\right) \cos\left(\frac{k+1}{n}\right)$ .

► Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \mapsto \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{R}_+$ . Nous dirons que  $f$  est  $k$ -lipschitizienne sur  $I$  lorsque  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  et ce quels que soient  $x$  et  $y$  appartenant à  $I$ .

Q4 On suppose que  $f$  et  $g$  sont toutes deux  $k$ -lipschitiziennes sur  $I$ . Que peut-on dire de  $f + g$  ?

Q5 Montrez que si  $f \in \mathcal{C}^1[a, b]$ , alors  $f$  est  $k$ -lipschitizienne sur  $[a, b]$ .

Q6 Soit  $f \in \mathcal{C}^1[0, 1]$ . Déterminez la limite de la suite de terme général  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right)$ .

### Exercice 3 : transformation binomiale

► Rappels : pour  $0 \leq k \leq n$ , on note  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Pour  $i$  et  $j$  relatifs, on note  $\delta_{i,j}$  le réel égal à 1 si  $i = j$ , à 0 dans le cas contraire.

**Q1** Pour  $0 \leq k \leq p \leq n$ , donnez une autre écriture du produit  $C_n^p C_p^k$ , faisant intervenir deux coefficients binomiaux.

►  $\mathbf{E}$  désigne le  $\mathbb{R}$ -e.v. des suites de réels. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un élément de  $\mathbf{E}$ ; définissons la suite  $\mathcal{T}(u)$  par :

$$(\mathcal{T}(u))_n = \sum_{0 \leq k \leq n} (-1)^k C_n^k u_k \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Vous noterez bien que  $\mathcal{T}$  associe, à une suite de réels, une autre suite de réels.

**Q2** Si  $u$  est une suite de réels, la notation  $\mathcal{T}(u_n)$  a-t-elle un sens ?

**Q3** Montrez que l'application  $\mathcal{T}$  est un endomorphisme de  $\mathbf{E}$ .

► Dans les cinq questions suivantes, l'expression « expliciter  $\mathcal{T}(u)$  » signifie « donner l'expression, en fonction de  $n$ , du terme général  $(\mathcal{T}(u))_n$  de la suite  $\mathcal{T}(u)$  ». Il va de soi que cette expression devra être *la plus simple possible*.

**Q4** Explicitez  $\mathcal{T}(u)$  lorsque  $u$  est la suite définie par  $u_n = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q5** Explicitez  $\mathcal{T}(u)$  lorsque  $u$  est la suite définie par  $u_n = n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q6** Explicitez  $\mathcal{T}(u)$  lorsque  $u$  est la suite définie par  $u_n = \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q7** Fixons  $x \in \mathbb{R}$ . Explicitez  $\mathcal{T}(u)$  lorsque  $u$  est la suite définie par  $u_n = x^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Q8** Fixons  $p \in \mathbb{N}$ . Explicitez  $\mathcal{T}(u)$  lorsque  $u$  est la suite définie par  $u_n = C_n^p$  pour tout  $n \geq p$ , et  $u_n = 0$  pour tout  $n < p$ .

**Q9** Justifiez la relation  $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} = \text{Id}_{\mathbf{E}}$ .

**Q10** Exhibez un élément  $u$  de  $\mathbf{E}$ , autre que la suite nulle, vérifiant  $\mathcal{T}(u) = -u$ .