Sup PCSI2 — Contrôle 1999/05

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

► On note $f : x \geqslant 0 \mapsto e^x - \cos x$.

Q1 Montrez que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même.

► On note g la bijection réciproque de f.

Q2 g est-elle dérivable à droite de 0 ? Si oui, calculez $g'_d(0)$.

Q3 Explicitez le $DL_1(0)$ de g.

Q4 g a-t-elle une limite en $+\infty$?

Q5 Donnez un équivalent *simple* de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q6 Justifiez la relation $g(x) = \ln x + \mathcal{O}(1/x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 2 (EDHEC 1995, voie éco)

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 + nx - 1$.

Q1 Prouvez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution réelle, que l'on notera x_n. On s'intéresse désormais à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q2 Donnez un encadrement très simple de x_n.

Q3 Quel est le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q4 Montrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; que peut-on dire, pour l'instant, de sa limite ℓ ?

Q5 Calculez $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$; quelle est la valeur de ℓ ?

Q6 Proposez une autre méthode pour déterminer ℓ.

Q7 Donnez un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers l'infini.

Q8 Justifiez la relation $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

Q9 Si possible, donnez un développement asymptotique de x_n à trois termes.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

► Les questions suivantes sont fortement indépendantes les unes des autres !

$\boxed{\text{Q1}}$ Combien vaut $\alpha = \arccos\Big(\sin\Big(\dfrac{369\pi}{17}\Big)\Big)$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Combien vaut $\beta = \arctan\Big(\tan\Big(\dfrac{369\pi}{17}\Big)\Big)$?

$\boxed{\text{Q3}}$ Calculez $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \big|1 + 2\sin(3t)\big|\,dt$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Quelle est la limite de la suite de terme général $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{(k+1)\pi}{2n}$?

Exercice 4

► On considère la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ définie par les relations $a_1 = 2$ et $a_{n+1} = 1 + a_n(a_n - 1)$ pour $n \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Déterminez a_2, a_3 et a_4. Vous ferez figurer le détail des calculs sur votre copie.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite strictement croissante de naturels non nuls.

► Pour $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{a_k}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminez S_2, S_3 et S_4. Vous ferez figurer le détail des calculs sur votre copie.

$\boxed{\text{Q4}}$ Proposez un script Maple comportant une fonction de calcul de a_n et une fonction de calcul de S_n.

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour $n \geqslant 1$, établissez la relation $1 - S_n = \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Quelle est sa limite ?

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que a_{n+1} est le plus petit naturel q tel que $S_n + \dfrac{1}{q} < 1$.

► Pour $n \geqslant 1$, on note $b_n = a_n - 1$ et $T_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{b_k}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Calculez T_n pour $n \in [\![1,4]\!]$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Des deux réels S_n et T_n, quel est le plus grand ?

$\boxed{\text{Q10}}$ Prouvez que la suite $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et montrez que sa limite ℓ appartient à $]1, 2]$.

► Pour $n \geqslant 1$, on note $c_n = 2^{2^{n-2}}$. Ainsi $c_2 = 2$, $c_3 = 4$, $c_4 = 16$ et $c_5 = 256$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Quelle relation simple lie c_{n+1} et c_n ?

$\boxed{\text{Q12}}$ Justifiez la majoration $b_n \geqslant c_n$ pour $n \geqslant 2$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Prouvez l'encadrement $\dfrac{5}{3} < \ell \leqslant \dfrac{12}{7}$.