

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie.** Qu'on se le dise.

### Exercice 1

► On note  $f : x \geq 0 \mapsto e^x - \cos x$ .

Q1 Montrez que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur lui-même.

► On note  $g$  la bijection réciproque de  $f$ .

Q2  $g$  est-elle dérivable à droite de 0 ? Si oui, calculez  $g'_d(0)$ .

Q3 Explicitez le  $DL_1(0)$  de  $g$ .

Q4  $g$  a-t-elle une limite en  $+\infty$  ?

Q5 Donnez un équivalent *simple* de  $g(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

Q6 Justifiez la relation  $g(x) = \ln x + \mathcal{O}(1/x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 2 (EDHEC 1995, voie éco)

► Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 + nx - 1$ .

Q1 Prouvez que l'équation  $f_n(x) = 0$  possède une et une seule solution réelle, que l'on notera  $x_n$ . On s'intéresse désormais à la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Q2 Donnez un encadrement très simple de  $x_n$ .

Q3 Quel est le sens de variation de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

Q4 Montrez que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge ; que peut-on dire, pour l'instant, de sa limite  $\ell$  ?

Q5 Calculez  $f_n\left(\frac{1}{n}\right)$  ; quelle est la valeur de  $\ell$  ?

Q6 Proposez une autre méthode pour déterminer  $\ell$ .

Q7 Donnez un équivalent simple de  $x_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Q8 Justifiez la relation  $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Q9 Si possible, donnez un développement asymptotique de  $x_n$  à trois termes.

### Exercice 3

► Les questions suivantes sont fortement indépendantes les unes des autres !

Q1 Combien vaut  $\alpha = \arccos\left(\sin\left(\frac{369\pi}{17}\right)\right)$  ?

Q2 Combien vaut  $\beta = \arctan\left(\tan\left(\frac{369\pi}{17}\right)\right)$  ?

Q3 Calculez  $J = \int_0^{\pi/2} |1 + 2 \sin(3t)| dt$ .

Q4 Quelle est la limite de la suite de terme général  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} \sin \frac{k\pi}{2n} \cos \frac{(k+1)\pi}{2n}$  ?

### Exercice 4

► On considère la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  définie par les relations  $a_1 = 2$  et  $a_{n+1} = 1 + a_n(a_n - 1)$  pour  $n \geq 1$ .

Q1 Déterminez  $a_2$ ,  $a_3$  et  $a_4$ . Vous ferez figurer le détail des calculs sur votre copie.

Q2 Montrez que  $(a_n)_{n \geq 1}$  est une suite strictement croissante de naturels non nuls.

► Pour  $n \geq 1$ , on note  $S_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{a_k}$ .

Q3 Déterminez  $S_2$ ,  $S_3$  et  $S_4$ . Vous ferez figurer le détail des calculs sur votre copie.

Q4 Proposez un script Maple comportant une fonction de calcul de  $a_n$  et une fonction de calcul de  $S_n$ .

Q5 Pour  $n \geq 1$ , établissez la relation  $1 - S_n = \frac{1}{a_{n+1} - 1}$

Q6 Montrez que la suite  $(S_n)_{n \geq 1}$  converge. Quelle est sa limite ?

Q7 Montrez que  $a_{n+1}$  est le plus petit naturel  $q$  tel que  $S_n + \frac{1}{q} < 1$ .

► Pour  $n \geq 1$ , on note  $b_n = a_n - 1$  et  $T_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{b_k}$ .

Q8 Calculez  $T_n$  pour  $n \in [1, 4]$ .

Q9 Des deux réels  $S_n$  et  $T_n$ , quel est le plus grand ?

Q10 Prouvez que la suite  $(T_n)_{n \geq 1}$  converge, et montrez que sa limite  $\ell$  appartient à  $]1, 2]$ .

► Pour  $n \geq 1$ , on note  $c_n = 2^{2^{n-2}}$ . Ainsi  $c_2 = 2$ ,  $c_3 = 4$ ,  $c_4 = 16$  et  $c_5 = 256$ .

Q11 Quelle relation simple lie  $c_{n+1}$  et  $c_n$  ?

Q12 Justifiez la majoration  $b_n \geq c_n$  pour  $n \geq 2$ .

Q13 Prouvez l'encadrement  $\frac{5}{3} < \ell \leq \frac{12}{7}$ .