

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie.** Qu'on se le dise.

### Exercice 1

► Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $S_n = \sum_{0 \leq k \leq n} 2^k C_{2n-k}^n$ .

- Q1 Proposez une fonction Maple qui calcule  $S_n$  pour  $n$  donné.
- Q2 Dressez un tableau donnant la valeur de  $S_n$  pour  $n \in \llbracket 0,4 \rrbracket$ . Vous ne donnerez le détail des calculs que pour  $S_4$ .
- Q3 Au vu des résultats obtenus, quelle conjecture formulez-vous concernant la valeur de  $S_n$  ?
- Q4 Pour  $0 < k \leq n$ , établissez la relation de PASCAL  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ . Le correcteur appréciera que vous lui présentiez deux méthodes différentes.
- Q5 En utilisant cette relation, établissez la formule  $S_{n+1} = \frac{1}{2}S_{n+1} + 2S_n + C_{2n+1}^n - \frac{1}{2}C_{2n+2}^{n+1}$ .
- Q6 Et maintenant, concluez !

### Exercice 2

► Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels. On distinguera bien  $u_n^2$ , qui est le carré du terme d'indice  $n$  de cette suite, et que l'on peut aussi noter  $(u_n)^2$ ; et  $u_{n^2}$ , qui est le terme d'indice  $n^2$ .

- Q1 Soit  $x > 0$ . Montrez que les relations  $u_1 = x$ , et  $u_{n+1} = \frac{1 + u_n}{n + u_n^2}$  pour  $n \geq 1$ , définissent *effectivement* une suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  de réels strictement positifs.
- Q2 Proposez un script Maple qui calcule la valeur de  $u_{100n}$  pour  $n \in \llbracket 1,20 \rrbracket$ .
- Q3 Dans cette question uniquement, on suppose  $x = 1$ ; dressez un tableau donnant la valeur de  $u_n$  pour  $n \in \llbracket 1,4 \rrbracket$ ; vous ferez apparaître les calculs dans votre copie.
- Q4 Si cette suite converge, quelle est *nécessairement* sa limite ?
- Q5 Montrez que  $u_n \geq 1$  implique  $u_{n+1} \leq 1$ .
- Q6 Montrez que  $u_n \leq 1$  implique  $u_{n+1} \leq \frac{2}{n}$ .
- Q7 Finalement, quels sont les indices  $n$  pour lesquels on a *certainement*  $u_n \leq 1$  ?
- Q8 Montrez que la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  converge, et précisez sa limite.
- Q9 Donnez un équivalent *très simple* de  $u_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- On note  $v_n = nu_n - 1$ .
- Q10 Exprimez  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  et de  $n$ .
- Q11 En déduire un équivalent simple de  $v_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- Q12 Donnez alors un développement asymptotique à deux termes de  $u_n$ ; le petit  $o$  final ne compte pas pour un terme.

### Exercice 3

► Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

- Q1** Deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifient respectivement  $u_n = o(n^2)$  et  $v_n = \mathcal{O}(n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Que peut-on dire des suites de terme généraux respectifs  $x_n = u_n + v_n$  et  $y_n = u_n \cdot v_n$  ?
- Q2** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels converge vers 1. La suite de terme général  $(u_n)^n$  converge-t-elle nécessairement ?
- Q3** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels vérifie  $u_n = \mathcal{O}(\ln n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. A-t-on nécessairement  $\exp(u_n) = \mathcal{O}(n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?
- Q4** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels vérifie  $u_n = \mathcal{O}(n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. A-t-on nécessairement  $\ln(u_n) = \mathcal{O}(\ln n)$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?
- Q5** José a enfin obtenu l'autorisation d'exporter ses fromages de Roquefort vers les États-Unis. Il doit toutefois les conditionner dans des boîtes métalliques (pour éviter toute fuite susceptible de perturber l'odorat des chiens détecteurs de drogue), de forme cylindrique, et de volume  $666 \text{ cm}^3$  (valeur imposée par une réglementation sanitaire dont la justification n'est pas très claire). Le fond et le couvercle (ronds) sont découpés dans un carré: le fabricant fait payer tout le métal utilisé, chutes incluses. Comment José doit-il choisir la hauteur et le rayon de ses boîtes pour minimiser le coût de fabrication ?