Sup PCSI2 — Contrôle 1999/03

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

Q1 Pour $x > 0$, établir l'inégalité $\ln x \leqslant x - 1$.

Q2 Dans quel(s) cas l'inégalité précédente est-elle stricte ?

► Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de réels strictement positifs. On définit la *moyenne arithmétique* M et la *moyenne géométrique* G de cette famille de nombres par les formules suivantes :

$$M = \frac{1}{n} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} a_k$$

$$G = \sqrt[n]{\prod_{1\leqslant k\leqslant n} a_k} = \left(\prod_{1\leqslant k\leqslant n} a_k \right)^{1/n}$$

Q3 En appliquant l'inégalité de la question 1 à chacun des réels $\frac{a_k}{M}$, établissez $G \leqslant M$.

Q4 José, exploitant agricole à Millau, souhaite acheter un grand pré rectangulaire de 25 hectares, qu'il compte enclore. La clôture nécessite un poteau tous les quatre mètres. Dans les ruines d'un McDonald's, José a repéré un stock de poteaux (roses) à l'abandon ; il y en a quarante bottes de douze. Suffiront-ils à son bonheur ?

Q5 Dans quel(s) cas l'inégalité $G \leqslant M$ est-elle stricte ?

► On définit la *moyenne harmonique* H de la famille $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ par la formule $\frac{n}{H} = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{a_k}$.

Q6 Établissez l'inégalité $H \leqslant G$.

Q7 Dans quel(s) cas l'inégalité $H \leqslant G$ est-elle stricte ?

Q8 Justifiez, pour $n > 0$, l'inégalité $\sqrt[n]{n!} \leqslant \frac{n+1}{2}$.

Q9 Justifiez, pour $n > 0$, l'inégalité $\frac{n}{1 + \ln n} \leqslant \sqrt[n]{n!}$.

Q10 Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $\ln(n!)$ lorsque n tend vers l'infini.

Tournez S.V.P.

Exercice 2

► Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

$\boxed{\text{Q1}}$ Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifie $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^2$. Peut-on affirmer que cette suite est croissante APCR ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifie $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2^n$. Peut-on affirmer que cette suite est croissante APCR ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifie $w_n + w_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} 2n$. A-t-on nécessairement $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est décroissante, et vérifie $x_n + x_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$. Montrez que l'on a nécessairement $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Au milieu du pré qu'il a finalement acheté, José découvre un forage ; il s'inquiète de sa profondeur, évidemment. Il jette un caillou dans le trou ; au bout de 4 secondes, il entend un juron : un spéléologue (heureusement casqué) passait juste à ce moment à l'aplomb du forage. Quelle est la profondeur du trou ? On donne $g = 9.8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$ et la vitesse du son dans l'air $V = 340\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Exercice 3

► On note Γ la courbe représentative de la fonction ln. Pour $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction $x > 0 \mapsto n - x$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrer que Γ et $\mathcal{C}_n$ possèdent un et un seul point d'intersection ; on notera x_n l'abscisse de ce point. Ainsi, x_n est l'unique solution de l'équation $\ln x = n - x$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

$\boxed{\text{Q3}}$ Quel est le comportement de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$: convergence ou divergence ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Donnez un équivalent *très simple* de x_n lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q5}}$ On note $y_n = n - x_n$. Donnez un équivalent *très simple* de y_n lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q6}}$ Sauriez-vous donner un développement asymptotique à trois termes de x_n, lorsque n tend vers l'infini ?