Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (Bac C Nantes juin 1979)

Q1 On note $f:\ z \in \mathbb{C} \mapsto z^3+(-7+3i)z^2+(12-16i)z+4(1+7i)$. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$, sachant qu'une de ses solutions est imaginaire pure.

Exercice 2 (Arthur Engel 8.7)

► Rappel : pour $a>0$ et $b \in \mathbb{R}$, a^b désigne le réel $e^{b\ln a} = \exp(b\ln a)$.

Q1 Montrez que la fonction $\varphi:\ x \in \mathbb{R} \mapsto \left(\sqrt{2}\right)^x$ est strictement croissante.

► On définit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels par la donnée de $x_0=\sqrt{2}$ et la relation $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q2 Montrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Q3 Montrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement majorée par 2.

► La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée par 2, elle converge vers un réel $\ell \leqslant 2$. Comme elle vérifie la relation $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ et que φ est continue, on peut même affirmer que $\ell=\varphi(\ell)$.

Q4 Justifiez l'affirmation suivante : ℓ est une solution de l'équation $\dfrac{\ln x}{x}=\dfrac{\ln 2}{2}$.

Q5 Étudiez les variations de $f:\ x>0 \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$. Donnez l'allure de sa courbe représentative.

Q6 Déduisez la valeur de ℓ de l'observation des variations de f.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 (d'après : Bac C Paris juin 1979)

► Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Justifiez *rapidement* l'encadrement $\dfrac{\pi}{4} \leqslant J_n \leqslant 2^{n-2}\pi\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Proposez une fonction Maple calculant J_n en fonction de n.

$\boxed{\text{Q3}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$\boxed{\text{Q4}}$ La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Déterminez deux réels a et b tels que l'égalité $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{a\cos x}{1+\sin x} - \dfrac{b\cos x}{1-\sin x}$ soit vraie pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Calculez J_0.

$\boxed{\text{Q7}}$ Au moyen d'une intégration par parties *soigneusement justifiée*, établissez pour $n \in \mathbb{N}$ la relation :

$$2(n+1)J_{n+1} = (2n+1)J_n + 2^n\sqrt{2}$$

$\boxed{\text{Q8}}$ En déduire les valeurs de J_1, J_2 et J_3. N'oubliez pas de réduire vos fractions !

$\boxed{\text{Q9}}$ Prouvez l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels vérifiant $J_n = a_n \ln(1+\sqrt{2}) + b_n\sqrt{2}$. Vous donnerez des relations exprimant a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

$\boxed{\text{Q10}}$ Résolvez la récurrence définissant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; vous donnerez une expression de a_n faisant intervenir des puissances, des factorielles, ou des coefficients binomiaux, mais débarassée de tout symbole $\prod$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Vous venez d'établir une formule exprimant simplement a_n. Vérifiez sa validité pour $n \in [\![1,3]\!]$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Résolvez de même la récurrence définissant la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$; vous donnerez une expression de b_n comme somme de termes faisant intervenir des puissances, des factorielles, ou des coefficients binomiaux, mais débarassés de tout symbole $\prod$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Vous venez d'établir une formule exprimant simplement b_n. Vérifiez sa validité pour $n = 3$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Proposez un script Maple calculant J_n en fonction de n, en utilisant les deux formules que vous venez d'établir.

$\boxed{\text{Q15}}$ Justifiez la minoration $b_n \geqslant \dfrac{\mathrm{C}_{2n}^n}{4^n} \times \dfrac{8^{n-1}}{(2n-1)\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}}$.

$\boxed{\text{Q16}}$ Déduisez de cette inégalité la limite de b_n lorsque n tend vers l'infini et retrouvez le résultat de la question 4.