Sup PCSI2 — Contrôle 1999/01

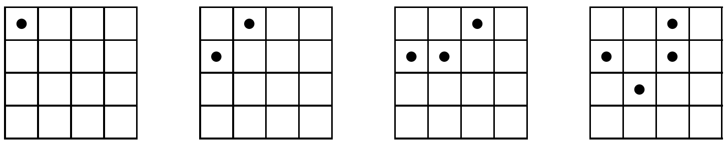
Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (d'après Chung, Graham, Morrison et Odlyzko)

► Soit $n \geqslant 4$. On considère une grille carrée de côté n ; chaque case de cette grille est repérée par le numéro de sa ligne et le numéro de sa colonne, tous deux compris entre 0 et $n-1$ comme l'indique la figure ci-dessous pour $n = 4$:

$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(0,3)$
$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$
$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$

► Initialement, un jeton (marqué •) est placé sur la case $(0,0)$. On peut ensuite effectuer des *manœuvres* : chaque manœuvre consiste à choisir une case (i,j) telle que les deux cases $(i+1,j)$ et $(i,j+1)$ soient libres ; à ôter un jeton de la case (i,j), et à placer un jeton sur chacune des cases $(i+1,j)$ et $(i,j+1)$. La figure ci-dessous illustre une suite de manœuvres de ce type, dans le cas $n = 4$:



Q1 Montrez que l'on ne peut faire qu'un nombre fini de manœuvres, et donnez un majorant de ce nombre, en fonction de n.

► Le *poids* de la case (i,j) est le réel 2^{-i-j}.

Q2 Dessinez la grille correspondant à $n = 5$, en indiquant dans chaque case son poids.

Q3 Calculez le poids $p(n,i)$ de la ligne i, en fonction de n et de i.

Q4 Calculez le poids total P_n de la grille, en fonction de n.

Q5 Quelle est la limite ℓ de P_n lorsque n tend vers l'infini ?

Q6 Justifiez l'inégalité $P_n < \ell$.

Q7 Montrez qu'au cours d'une manœuvre, la somme des poids des cases contenant un jeton est inchangée.

► Soit $q \in \mathbb{N}$. On note Z_q l'ensemble des cases (i,j) qui vérifient $i + j \leqslant q$.

Q8 Dessinez la grille correspondant à $n = 5$, et hachurez la zone Z_3.

Q9 Calculez le poids de la zone Z_3.

Q10 Est-il possible, par une suite de manœuvres, de vider la zone Z_3 ?

Q11 Dessinez la grille correspondant à $n = 5$, et hachurez la zone Z_2.

Q12 Montrez qu'après une suite de manœuvres, il reste toujours un jeton dans la colonne 0.

Q13 Est-il possible, par une suite de manœuvres, de vider la zone Z_2 ?

Tournez S.V.P.

Exercice 2 (Great Internet Mersenne Prime Search)

► Rappel : un naturel n est *premier* s'il a exactement deux diviseurs : 1 et lui-même. Par exemple 3, 17 et 31 sont premiers alors que $15 = 3 \times 5$ ne l'est pas.

► Le premier juin 1999 a été découvert un trente-huitième nombre de MERSENNE premier. Il s'agit d'un nombre de la forme $2^n - 1$, où n est premier. L'annonce de cette découverte indique que l'écriture décimale de ce nombre requiert 2098960 chiffres ; on se propose de déterminer la valeur de n à partir de cette information.

$\boxed{\text{Q1}}$ Encadrez $2^n - 1$ par deux puissances consécutives de 10.

$\boxed{\text{Q2}}$ En déduire un encadrement de n, faisant intervenir la fonction logarithme.

$\boxed{\text{Q3}}$ Utilisez une calculatrice pour obtenir un encadrement de n par des naturels. Combien de candidats reste-t-il à examiner ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Utilisez alors le fait que n est premier pour conclure.

Exercice 3 (Engel 9.25)

► Les relations $x_0 = 1$ et $x_{n+1} = (x_n)^2 + x_n$ définissent une suite de réels strictement positifs. On lui associe la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{1 + x_k}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Calculez les termes de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'indice compris entre 1 et 5 inclus.

$\boxed{\text{Q2}}$ Proposez une fonction Maple calculant x_n, puis une expression calculant les termes demandés à la question précédente.

$\boxed{\text{Q3}}$ Justifiez l'inégalité $x_n \geqslant 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ En déduire la majoration $S_n < 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et donnez un majorant de sa limite. Notez bien qu'on ne demande pas, pour l'instant, de calculer cette limite !

$\boxed{\text{Q6}}$ Justifiez l'inégalité $x_n < 2^{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Attention : 2^{2^n} désigne le nombre $2^{(2^n)}$, et non le nombre $(2^2)^n = 4^n = 2^{2n}\ldots$

$\boxed{\text{Q7}}$ Calculez S_n pour $n \in [\![0,3]\!]$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Proposez une fonction Maple calculant S_n, puis une expression calculant les termes demandés à la question précédente.

$\boxed{\text{Q9}}$ Au vu des calculs que vous venez de faire, proposez une expression simple pour S_n, ne faisant intervenir qu'un seul terme de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Prouvez la validité de l'expression que vous venez de conjecturer.

$\boxed{\text{Q11}}$ Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$?