$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Devoir 1999/07}}$

Vous devez rédiger au moins deux exercices sur trois.

Exercice 1

► Notons $\mathrm{E} = \mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}_+^*\big)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $f \in \mathrm{E}$. Justifiez l'existence du réel $\Phi(f) = \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt\right) \times \left(\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{f(t)}\right)$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Justifiez soigneusement l'affirmation suivante : $\Phi(f)$ est strictement positif, et ce quel que soit $f \in \mathrm{E}$.

► Dans la suite, nous noterons **B** l'ensemble $\big\{\Phi(f) \bigm| f \in \mathrm{E}\big\}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que 1 appartient à **B**.

$\boxed{\text{Q4}}$ Dans cette question, nous notons $g : t \in [0,1] \mapsto 1 + t^2$. Calculez $\Phi(g)$. Vous constaterez que $\Phi(g)$ est strictement supérieur à 1 (on ne vous demande pas de preuve).

$\boxed{\text{Q5}}$ L'ensemble **B** possède-t-il une borne inférieure ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Justifiez l'inégalité $\Phi(f) \geqslant 1$ pour tout $f \in \mathrm{E}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Précisez les éléments f de E pour lesquels $\Phi(f) = 1$.

$\boxed{\text{Q8}}$ L'ensemble **B** possède-t-il un plus petit élément ?

$\boxed{\text{Q9}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Construisez un élément f_n de E vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt \geqslant 1$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{f_n(t)} \geqslant n$. Suggestion : choisissez f_n affine par morceaux (mais continue, bien entendu).

$\boxed{\text{Q10}}$ L'ensemble **B** possède-t-il une borne supérieure ?

Exercice 2

► Les questions de cet exercice sont deux à deux indépendantes.

$\boxed{\text{Q1}}$ On note Φ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{|x|}^{|2x|} \sin(t^3)\,dt$. Justifiez rapidement l'existence et la continuité de Φ. Quelle est la parité de Φ ? La fonction Φ est-elle dérivable ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Question posée en 1999 à l'oral du concours commun Centrale-Supélec. Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x$. Donnez une expression simple de $f(x)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$. A-t-on $\ln\big(f(x)\big) \underset{x \to +\infty}{\sim} \ln\big(g(x)\big)$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Question posée en 1999 à l'oral du concours X-ESPCI. Déterminez la limite de la suite de terme général $u_n = n \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sin\frac{k}{n} - \sin\frac{k-1}{n}\right)^2$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2$. A-t-on nécessairement $f'(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} 2x$?

Exercice 3

► On se propose de répondre à la question suivante, posée en 1999 à l'oral du concours commun Mines-Ponts : existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{C}\big([0,1],[0,1]\big)$ telle que $\mathrm{Card}\big(f^{-1}(x)\big) = 2$ pour tout $x \in [0,1]$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Quel théorème connaissez-vous, concernant les fonctions continues sur un segment ?

$\boxed{\text{Q2}}$ Quel théorème connaissez-vous, concernant les fonctions continues sur un intervalle quelconque ?

► Nous allons prouver que la réponse à la question posée est négative ; pour ce faire, nous raisonnerons par l'absurde. Soit donc $f \in \mathcal{C}\big([0,1],[0,1]\big)$ telle que $\mathrm{Card}\big(f^{-1}(x)\big) = 2$ pour tout $x \in [0,1]$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Justifiez l'existence de deux réels a et b vérifiant $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et $f(a) = f(b) = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} f(x)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Justifiez l'existence d'un réel c vérifiant $a < c < b$ et $f(c) = \inf\limits_{a \leqslant x \leqslant b} f(x)$.

$\boxed{\text{Q5}}$ On suppose qu'il existe deux réels c_1 et c_2 répondant aux conditions de la question 4. Mettez en évidence une contradiction.

$\boxed{\text{Q6}}$ On suppose qu'il n'existe qu'un réel c répondant aux conditions de la question 4. Montrez que, dans ce cas, on ne peut avoir à la fois $0 < a$ et $b < 1$ et concluez.