

Vous devez rédiger au moins deux exercices sur trois.

Exercice 1

► Notons $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$.

Q1 Soit $f \in E$. Justifiez l'existence du réel $\Phi(f) = \left(\int_0^1 f(t) dt \right) \times \left(\int_0^1 \frac{dt}{f(t)} \right)$.

Q2 Justifiez soigneusement l'affirmation suivante : $\Phi(f)$ est strictement positif, et ce quel que soit $f \in E$.

► Dans la suite, nous noterons \mathbf{B} l'ensemble $\{\Phi(f) \mid f \in E\}$.

Q3 Montrez que 1 appartient à \mathbf{B} .

Q4 Dans cette question, nous notons $g : t \in [0, 1] \mapsto 1 + t^2$. Calculez $\Phi(g)$. Vous constaterez que $\Phi(g)$ est strictement supérieur à 1 (on ne vous demande pas de preuve).

Q5 L'ensemble \mathbf{B} possède-t-il une borne inférieure ?

Q6 Justifiez l'inégalité $\Phi(f) \geq 1$ pour tout $f \in E$.

Q7 Précisez les éléments f de E pour lesquels $\Phi(f) = 1$.

Q8 L'ensemble \mathbf{B} possède-t-il un plus petit élément ?

Q9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Construisez un élément f_n de E vérifiant $\int_0^1 f_n(t) dt \geq 1$ et $\int_0^1 \frac{dt}{f_n(t)} \geq n$. Suggestion : choisissez f_n affine par morceaux (mais continue, bien entendu).

Q10 L'ensemble \mathbf{B} possède-t-il une borne supérieure ?

Exercice 2

► Les questions de cet exercice sont deux à deux indépendantes.

Q1 On note Φ la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{|x|}^{|2x|} \sin(t^3) dt$. Justifiez rapidement l'existence et la continuité de Φ . Quelle est la parité de Φ ? La fonction Φ est-elle dérivable ?

Q2 Question posée en 1999 à l'oral du concours commun Centrale-Supélec. Déterminez l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \arctan x$. Donnez une expression simple de $f(x)$.

Q3 Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$. A-t-on $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(g(x))$?

Q4 Question posée en 1999 à l'oral du concours X-ESPCI. Déterminez la limite de la suite de terme général $u_n = n \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\sin \frac{k}{n} - \sin \frac{k-1}{n} \right)^2$.

Q5 Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$. A-t-on nécessairement $f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$?

Exercice 3

► On se propose de répondre à la question suivante, posée en 1999 à l'oral du concours commun Mines-Ponts : existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], [0, 1])$ telle que $\text{Card}(f^{-1}(x)) = 2$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Q1 Quel théorème connaissez-vous, concernant les fonctions continues sur un segment ?

Q2 Quel théorème connaissez-vous, concernant les fonctions continues sur un intervalle quelconque ?

► Nous allons prouver que la réponse à la question posée est négative ; pour ce faire, nous raisonnerons par l'absurde. Soit donc $f \in \mathcal{C}([0, 1], [0, 1])$ telle que $\text{Card}(f^{-1}(x)) = 2$ pour tout $x \in [0, 1]$.

- Q3 Justifiez l'existence de deux réels a et b vérifiant $0 \leq a < b \leq 1$ et $f(a) = f(b) = \sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$.
- Q4 Justifiez l'existence d'un réel c vérifiant $a < c < b$ et $f(c) = \inf_{a \leq x \leq b} f(x)$.
- Q5 On suppose qu'il existe deux réels c_1 et c_2 répondant aux conditions de la question 4. Mettez en évidence une contradiction.
- Q6 On suppose qu'il n'existe qu'un réel c répondant aux conditions de la question 4. Montrez que, dans ce cas, on ne peut avoir à la fois $0 < a$ et $b < 1$ et concluez.