► On note $f: t > 0 \mapsto \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$.

Q1 Justifiez l'existence de l'application $G: x > 0 \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

Q2 Quel est le signe de $G(x)$?

Q3 Prouvez que G est dérivable, et explicitez $G'(x)$.

Q4 Prouvez que G est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q5 Pour $x > 0$, établissez l'encadrement $\dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leqslant G(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$.

Q6 En déduire un équivalent *simple* de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la branche infinie corespondante de la courbe représentative de G ?

Q7 En utilisant à nouveau le résultat de la question 5, déterminez la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Que peut-on dire, cette fois, au sujet de la courbe représentative de G ?

Q8 Montrez que le signe de $G'(x)$ est celui de l'expression $A(x) = \ln \dfrac{(1+x^2)^2}{1+4x^2}$.

Q9 Étudiez alors les variations de G, puis donnez l'allure de la courbe représentative de G.

► On se propose de préciser le comportement de $G(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

Q10 Pour $h \geqslant 0$, établissez l'encadrement $h - \dfrac{h^2}{2} \leqslant \ln(1+h) \leqslant h$.

Q11 Déterminez alors un réel $a > 0$ tel que $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} \leqslant G(x) \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2(1-t^2/2)}$ pour tout $x \in \,]0, a[$.

Q12 Déterminez un réel $b > 0$ tel que $\dfrac{1}{1-u} \leqslant 1 + u + 2u^2$ pour tout $u \in [0, b]$.

Q13 Déterminez alors un réel $c > 0$ tel que $\dfrac{1}{2x} \leqslant G(x) \leqslant \dfrac{1}{2x} + x + \dfrac{7x^3}{6}$ pour $x \in \,]0, c]$.

Q14 En déduire un équivalent simple de $G(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

Q15 Pour quelles valeurs de x l'intégrale $J(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2(t^2-2)}$ a-t-elle un sens ?

Q16 Déterminez des réels α, β, γ et δ tels que $\dfrac{1}{X^2(X^2-2)} = \dfrac{\alpha}{X} + \dfrac{\beta}{X^2} + \dfrac{\gamma}{X-\sqrt{2}} + \dfrac{\delta}{X+\sqrt{2}}$.

Q17 Donnez alors une expression de $J(x)$ ne faisant intervenir qu'un seul logarithme.