

Définitions et notations

- Soit E un \mathbb{K} -e.v. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E . On note $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul, et \mathbf{i} l'endomorphisme identique de E . Soit f un endomorphisme de E ; pour $n \in \mathbb{N}$, on définit f^n par les formules $f^0 = \mathbf{i}$ et $f^{n+1} = f \circ f^n$. On sait que $f^{n+1} = f^n \circ f$, $f^{n+p} = f^n \circ f^p$ et $f^{np} = (f^n)^p$.
- Un endomorphisme f de E est *nilpotent* s'il existe un naturel n tel que $f^n = \mathbf{0}$. L'*indice de nilpotence* de f est alors le plus petit naturel satisfaisant cette condition; on le notera $\nu(f)$.

Noyaux et images des itérés d'un endomorphisme

- Soient E est un \mathbb{K} -e.v. quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $N_k(f) = \ker(f^k)$ et $I_k(f) = \text{im}(f^k)$.

- Q1** Prouvez que la suite de terme général $N_k(f)$ est croissante.
- Q2** Prouvez que la suite de terme général $I_k(f)$ est décroissante.
- Q3** Prouvez que, si $N_k(f) = N_{k+1}(f)$, alors $N_k(f) = N_{k+p}(f)$ pour tout naturel p .
- Q4** Énoncez et démontrez la propriété analogue pour la suite des $I_k(f)$.
- Q5** Montrez que la suite de terme général $N_k(f)$ est, soit stationnaire, soit strictement croissante.
- Q6** De même, montrez que la suite de terme général $I_k(f)$ est, soit stationnaire, soit strictement décroissante.
- On note $N(f) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} N_k(f)$, et $I(f) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k(f)$.
- Q7** Prouvez que $N(f)$ est un s.e.v. de E , et qu'il est stable par f .
- Q8** De même, prouvez que $I(f)$ est un s.e.v. de E , et qu'il est stable par f .

Un exemple en dimension infinie

- Dans cette partie, $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{L}(E)$ est défini par $D(f) = f'$.

- Q9** D est-il surjectif? Est-il injectif?
- Q10** Explicitez $I_k(D)$ et $N_k(D)$.

Un exemple en dimension finie

- Dans cette partie, $E = \mathbb{K}^n$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ est défini par $f(e_i) = e_{i+1}$ pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et $f(e_n) = \vec{0}$.

- Q11** Explicitez $f^k(e_i)$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $k \in \mathbb{N}$.
- Q12** Montrez que f est nilpotent, et déterminez son indice de nilpotence.
- Q13** Explicitez $N_k(f)$ et $I_k(f)$, pour $k \in \mathbb{N}$.
- Q14** Montrez que $\mathbf{i} - f$ est un automorphisme de E .
- Q15** Explicitez l'image de e_k par $(\mathbf{i} - f)^{-1}$.

Généralisation

- Dans cette partie, E désigne un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n . f est un endomorphisme de E .

- Q16** Prouvez que la suite de terme général $N_k(f)$ est stationnaire.
- Q17** Prouvez que la suite de terme général $I_k(f)$ est stationnaire.
- Q18** Prouvez que ces deux suites stationnent à partir du même rang.
- Q19** Prouvez que $E = N(f) \oplus I(f)$.
- Q20** Prouvez que f induit un endomorphisme nilpotent de $N(f)$. Quel est son indice de nilpotence?
- Q21** Prouvez que f induit un automorphisme de $I(f)$.

Question subsidiaire

- Q22** Soient E un \mathbb{K} -e.v. de dimension finie n , et f un endomorphisme nilpotent de E . On suppose $\nu(f) = n$. Il existe donc un vecteur u de E tel que $f^{n-1}(u) \neq \vec{0}$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $u_i = f^{i-1}(u)$. Montrez que la famille $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E .