Sup PCSI2 — Devoir 1999/02

► On note $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp(x^2/2)$. Il est clair que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Q1 Explicitez $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvez l'existence d'une fonction polynôme P_n telle que $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; vous donnerez une relation exprimant P_{n+1} en fonction de P_n. Vous préciserez également le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n.

Q3 Utilisez la formule établie à la question précédente pour expliciter $P_4(x)$, $P_5(x)$ et $P_6(x)$; vous présenterez les calculs sur votre copie.

Q4 Montrez que f est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients polynomiaux. *On ne vous demande pas de résoudre cette équation !*

Q5 En utilisant la formule de Leibniz, mettez en évidence une relation entre P_{n+2}, P_{n+1} et P_n.

Q6 En déduire une expression de P'_{n+1} en fonction de P_n.

Q7 Montrez alors que P_n est solution d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre, à coefficients polynomiaux.

Q8 Fixons $n \in \mathbb{N}$; compte tenu de la parité de P_n, on peut écrire $P_n(x) = \sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} a_k x^{n-2k}$. a_k désigne donc le coefficient de x^{n-2k} dans l'expression de $P_n(x)$; en particulier, a_0 est le coefficient dominant de P_n. Utilisez l'équation différentielle établie à la question précédente pour établir une relation entre a_k et a_{k+1}, et en déduire une expression de a_k en fonction de n et k, au moyen de factorielles et/ou de puissances.