Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

Q1 Justifiez l'existence de $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_{2x}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^5+t^6}}$.

Q2 Montrez que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q3 Explicitez $F'(x)$.

Q4 Déterminez le $DL_{11}(0)$ de F.

Q5 Déterminez la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q6 $F(x)$ possède-t-elle une limite lorsque x tend vers $-\infty$?

Exercice 2

► On note $\Phi : P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) + (2X-1)P'$.

Q1 Montrez que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2 Comparez les degrés de P et de $\Phi(P)$.

Q3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrez que Φ induit un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, que l'on notera Φ_n dans la suite.

Q4 Montrez que Φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q5 Explicitez la matrice A de Φ_3 dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Q6 Calculez A^{-1}.

Q7 Calculez la trace de Φ_n.

Exercice 3

► Soient $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{E} = \mathbb{R}_{2p}[X]$ et $\varphi : (P,Q) \in \mathcal{E}^2 \mapsto \displaystyle\frac{1}{2p+1}\sum_{k=-p}^{p} P(k)Q(k)$.

Q1 Prouvez que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{E}$.

Q2 Notons $\|P\| = \sqrt{\varphi(P,P)}$ la norme du polynôme P. Calculez $\|1\|$ et $\|X\|$.

Q3 Soient P et Q deux éléments de $\mathcal{E}$. Supposons P pair et Q impair. Combien vaut $\varphi(P,Q)$?

Q4 Notons M la matrice de φ dans la base canonique $(X^k)_{0 \leqslant k \leqslant 2p}$ de $\mathcal{E}$; les lignes et les colonnes de M seront numérotées de 0 à $2p-1$. Pour i et j appartenant à $[\![0,2p]\!]$, donnez une expression de $M_{i,j}$ faisant intervenir au besoin une somme $S_p^q = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant p} k^q$.

Exercice 4

► Pour $n \geqslant 1$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{k}{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$.

Q1 Rédigez une fonction Maple calculant S_n.

Q2 Donnez un majorant *simple* de S_n en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Q3 Déterminez un équivalent *simple* de S_n lorsque n tend vers l'infini, en observant $\dfrac{S_n}{n}$.