Sup PCSI2 — Contrôle 1998/06

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

Q1 Montrez que l'on a $2^k > k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

► On note $\varphi :\ p \in \mathbb{N} \mapsto 2^p + p$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrez qu'il existe *un* et *un seul* naturel p_n tel que $\varphi(p_n) \leqslant n < \varphi(p_n + 1)$.

Q3 Calculez p_{1999}.

Q4 Montrez que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Est-elle *strictement* croissante ?

Q5 Donnez un équivalent *simple* de p_n lorsque n tend vers l'infini ; vous ferez intervenir un logarithme.

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0,n]\!]$, on note $\mu(n,k) = \min\big(2^{n-k}, 2^{2^k} - 1\big)$. On note ensuite $g(n) = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n} \mu(n,k)$.

► Attention : a^{b^c} désigne $a^{(b^c)}$ et non $(a^b)^c = a^{bc}$. Ainsi $2^{3^2} = 2^{(3^2)} = 2^9 = 512$ alors que $(2^3)^2 = 8^2 = 64$.

Q6 Calculez $g(4)$; à cet effet, vous dresserez un tableau présentant les valeurs de 2^{4-k}, $2^{2^k} - 1$ et $\mu(4,k)$ pour $k \in [\![0,4]\!]$. On ne demande pas les calculs intermédiaires qui auraient servi à obtenir ces valeurs.

Q7 Justifiez la majoration $g(n) \leqslant 2^n$.

Q8 L'étudiant Maurice Malhabile a rédigé la session Maple suivante :

```
mu : = proc(n,k) min(2^(n-k),2^(2^k)-1) end;
g := proc(n) sum(mu(n,k),k=0..n) end;
```

Il a obtenu $g(3) = 7$, $g(5) = 19$ et $g(10) = 274$. Mais quand il a voulu calculer $g(20)$, il a eu une désagréable surprise. Expliquez pourquoi.

Q9 Combien vaut $\mu(n,k)$ si $n - k \geqslant 2^k$?

Q10 Combien vaut $\mu(n,k)$ si $n - k < 2^k$?

Q11 En utilisant les résultats précédents, rédigez correctement la fonction `mu`, pour pouvoir calculer $g(20)$ dans un délai raisonnable.

► Nous nous proposons d'étudier le comportement de la suite de terme général $g(n)$. Pour alléger les écritures, nous noterons dans toute la suite p (au lieu de p_n) le naturel défini par $2^p + p \leqslant n < 2^{p+1} + p + 1$.

Q12 Justifiez l'écriture suivante : $g(n) = \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant p} (2^{2^k} - 1) + \sum\limits_{p<k\leqslant n} 2^{n-k}$.

Q13 Établissez l'expression : $g(n) = 2^{n-p} + \sum\limits_{0\leqslant k\leqslant p} 2^{2^k} - (p+2)$.

Q14 Montrez que la suite de terme général $g(n)$ est *strictement* croissante.

Q15 Justifiez la minoration $g(n) \geqslant \dfrac{2^n}{n}$.

Q16 On note $\tau(n) = \dfrac{ng(n)}{2^n}$. Combien vaut $g(1)$? Déduisez-en la valeur de $\min\limits_{n\geqslant 1} \tau(n)$.

Q17 Justifiez la majoration $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant p} 2^{2^k} \leqslant 2 \cdot 2^{2^p}$.

Q18 Montrez que n est majoré par $3 \cdot 2^p$.

Q19 Déterminez alors un réel A qui majore la suite de terme général $\tau(n)$.

Tournez S.V.P.

Exercice 2

► $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $f \in \mathcal{E}$. Justifiez *rigoureusement* l'existence de la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2}\,dt$ et son appartenance à $\mathcal{E}$.

► Cette fonction sera désormais notée $\varphi(f)$. φ est donc une fonction de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

$\boxed{\text{Q2}}$ Explicitez $\varphi(g)$ avec $g : t \mapsto 1$, puis $\varphi(h)$ avec $h : t \mapsto t$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouvez que φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Prouvez que φ est injective.

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit $f \in \mathcal{E}$, et $F = \varphi(f)$. Combien vaut $F(0)$? φ est-elle surjective ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $F \in \mathcal{E}$ vérifiant $F(0) = 0$. Montrez qu'il existe un et un seul élément f de $\mathcal{E}$ tel que $\varphi(f) = F$. Vous expliciterez f en fonction de F.

► On dit qu'un s.e.v. G de $\mathcal{E}$ est *stable* par φ si $\varphi(G) \subset G$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Prouvez que le s.e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de $\mathcal{E}$ est stable par φ.

$\boxed{\text{Q8}}$ On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{E}$ bornés, *id est* pour lesquels il existe un réel $M \geqslant 0$ (et dépendant de f) tel que $\big|f(x)\big| \leqslant M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrez que $\mathcal{B}$ est stable par φ.