$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Contrôle 1998/05}}$

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

$\boxed{\text{Q1}}$ Question préliminaire, sans aucun rapport avec la suite : simplifiez $A_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \left(\mathrm{C}_n^k\right)^2$. Le correcteur apprécierait vivement que vous lui proposiez *deux* méthodes différentes.

► Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{C}_{2k}^k \mathrm{C}_{2n-2k}^{n-k}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Rédigez une fonction Maple qui calcule S_n pour n donné.

$\boxed{\text{Q3}}$ Calculez S_n pour $n \in [\![0,3]\!]$. Vous commencerez par dresser (sans justifications) le tableau des C_n^k pour $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant 6$; vous ferez ensuite apparaître sur votre copie les calculs intermédiaires pour chaque S_n.

$\boxed{\text{Q4}}$ Au vu des résultats précédents, quelle expression simple de S_n conjecturez-vous ?

► Nous nous proposons d'établir de différentes façons le résultat que nous venons de conjecturer.

► Première méthode : on note $\mathcal{I} =]-\infty, 1/4[$ et $\varphi : x \in \mathcal{I} \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Justifiez brièvement l'appartenance de φ à $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{I}, \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez qu'il existe des réels a_n et b_n (qui dépendent de n, mais pas de x) tels que $\varphi^{(n)}(x) = a_n(1-4x)^{b_n}$ pour tout $x < 1/4$. Notez bien que, dans cette question, on ne vous demande pas d'expliciter a_n et b_n.

$\boxed{\text{Q7}}$ Donnez des expressions simples de a_n et b_n.

$\boxed{\text{Q8}}$ Écrivez alors le $DL_n(0)$ de φ. Vous ferez apparaître des coefficients binomiaux.

$\boxed{\text{Q9}}$ Observez le coefficient de x^n dans le $DL_n(0)$ de φ^2 pour obtenir l'expression simplifiée de S_n.

► Deuxième méthode : pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \mathrm{C}_{2k}^k \mathrm{C}_{2n-2k}^{n-k} x^{n-k}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Pour $x \neq 0$, justifiez la relation $x^n f_n\left(\dfrac{1}{x}\right) = f_n(x)$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Déduisez-en une relation entre $f_n'(1)$ et $f_n(1)$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Voyez-vous une autre façon d'établir cette relation ?

$\boxed{\text{Q13}}$ Prouvez que $f_{n+1}'(x) = 4x f_n'(x) + 2 f_n(x)$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Déduisez-en une relation *très simple* entre $f_{n+1}(1)$ et $f_n(1)$ et concluez.

Tournez S.V.P.

Exercice 2 : test de connaissances sur les fonctions

▶ Voici des assertions au sujet de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple). Une réponse exacte mais non justifiée ne rapportera aucun point.

$\boxed{\text{Q1}}$ Si f et g sont strictement monotones, alors $f-g$ est strictement monotone.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si f et g sont monotones, alors $f-g$ est monotone.

$\boxed{\text{Q3}}$ Si f et g sont croissantes, alors fg est croissante.

$\boxed{\text{Q4}}$ Si $f(x)$ est un $o\big(g(x)\big)$ lorsque x tend vers $+\infty$, alors $e^{f(x)}$ est un $o\big(e^{g(x)}\big)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Si $\sin\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Si $\arctan\big(f(x)\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Si f est dérivable et bornée, alors f' est également bornée.

$\boxed{\text{Q8}}$ Si f est lipschitzienne, alors elle est dérivable.

$\boxed{\text{Q9}}$ Si f est dérivable, alors elle est lipschitzienne.

$\boxed{\text{Q10}}$ Si $f^2(x)+f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

▶ Les questions suivantes sont plus difficiles…

$\boxed{\text{Q11}}$ Si $f(x^2)+f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Si $f(x)$ est un $o\big(g(x)\big)$ lorsque x tend vers $+\infty$, alors il existe un exposant $\alpha > 0$ et un réel A tels que $x^\alpha\big|f(x)\big| \leqslant \big|g(x)\big|$ pour tout $x \geqslant A$.