Sup PCSI2 — Contrôle 1998/01

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

► Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}$, on note $S_n^\alpha = \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$.

Q1 Rappelez les valeurs de S_n^1 et S_n^2 (on ne demande pas de preuve).

Q2 Donnez les développements respectifs de $(a+b)^4$ et $(a+b)^5$.

Q3 Donnez une expression simple (preuve à l'appui) de S_n^3.

Q4 Donnez une expression simple (preuve à l'appui) de S_n^4. Vous présenterez le résultat sous forme d'une expression en n ordonnée selon les puissances décroissantes.

Q5 Donnez une expression factorisée de S_n^4.

Exercice 2

► Nous nous proposons d'établir l'encadrement $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} \leqslant \mathrm{C}_{2n}^n \leqslant \dfrac{4^n}{\sqrt[3]{n}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q1 Vérifiez l'encadrement pour $n = 1$.

Q2 Démontrez l'encadrement pour $n = 2$ et $n = 3$. *Attention* : les arguments faisant appel à des « valeurs approchées » de $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{3}$ ou $\sqrt[3]{3}$ ne seront pas acceptés.

Q3 Montrez que, si l'encadrement est vrai au rang $n \geqslant 1$, alors il l'est aussi au rang $n+1$.

Q4 Concluez !

Exercice 3

► Soit p un naturel au moins égal à 2. Notons E_p l'ensemble des naturels n tels que $(2n)! > p^n$.

Q1 Exhibez un naturel qui n'appartient pas à E_p.

Q2 Montrez que p appartient à E_p.

Q3 Justifiez le fait que E_p possède un plus petit élément, que nous noterons désormais $f(p)$.

Q4 Montrez que, si n appartient à E_p, alors $2n(2n-1) > p$.

Q5 Justifiez alors la relation $f(p) > \dfrac{\sqrt{p}}{2}$.

Q6 Montrez que, si n appartient à E_p, alors $n+1$ appartient aussi à E_p.

Q7 Montrez que n appartient à E_p si et seulement si $n \geqslant f(p)$.

Q8 Calculez $f(p)$ pour $p \in [\![2, 9]\!]$. Vous présenterez dans un tableau les résultats de vos calculs (lesquels calculs ne devront pas apparaître dans votre copie).

Q9 Montrez que la fonction f est croissante.

Q10 La fonction f est-elle strictement croissante ?

Q11 Soient $p \geqslant 2$ et $n \in \mathbb{N}$; notons $g(n,p)$ le plus petit élément de E_p au moins égal à n. Rédigez une fonction en Maple qui calcule $g(n,p)$.

Q12 Rédigez alors une fonction en Maple qui calcule $f(p)$.