

Partie I : quelques propriétés de φ

► Notons $\varphi : t \geq 0 \mapsto e^{\sqrt{t}}$.

Q1 Quelle est la classe de continuité de φ sur \mathbb{R}_+ ?

Q2 Quelle est la classe de continuité de φ sur \mathbb{R}_+^* ?

Q3 Explicitez $\varphi'(t)$, puis $\varphi''(t)$, pour $t > 0$.

Q4 Prouvez que φ est solution sur \mathbb{R}_+^* d'une équation différentielle linéaire \mathcal{E} , à coefficients polynomiaux *très simples*.

Partie II : une famille de polynômes

Q5 Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvez l'existence d'un polynôme P_n tel que $\varphi^{(n)}(t) = \frac{P_n(\sqrt{t})\varphi(t)}{2^n t^n}$ pour tout $t > 0$. Vous écrirez une relation \mathcal{R} exprimant P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n .

Q6 Déterminez le degré et le coefficient dominant de P_n .

Q7 Vérifiez que les expressions de P_1 et P_2 déduites de Q3 satisfont la relation \mathcal{R} .

Q8 Utilisez cette relation pour calculer P_3 et P_4 .

Q9 Pour $n \geq 0$, donnez une expression *très simple* de $P_n(0)$.

Q10 Pour $n \geq 1$, donnez une expression de $\prod_{1 \leq k \leq n} (2k - 1)$ faisant intervenir des factorielles et/ou des puissances, mais débarassée de tout signe \prod .

Q11 Pour $n \geq 1$, donnez une expression *simple* de $P'_n(0)$.

Q12 Pour $n \geq 1$, donnez une expression simple du coefficient c_n de X^{n-1} dans P_n .

Q13 Énoncez la formule de LEIBNIZ. Aucune preuve n'est demandée.

Q14 En appliquant la formule de LEIBNIZ à l'équation \mathcal{E} , obtenez une relation liant P_n , P_{n+1} et P_{n+2} .

Q15 Vérifiez la validité de la relation obtenue, aux rangs $n = 1$ et $n = 2$.

Q16 Montrez que P_n est solution d'une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients polynomiaux.

Q17 Vérifiez la validité de la relation obtenue, aux rangs $n = 3$ et $n = 4$.

► Dans les trois questions suivantes, nous fixons $n \geq 2$ et nous notons $P_n = \sum_{0 \leq k \leq n} a_k X^k$.

Q18 Pour $1 \leq k \leq n$, établissez la relation $a_{k-1} = -\frac{(2n-k)(k-1)}{2(n+1-k)} a_k$. Vous utiliserez l'équation différentielle dont P_n est solution.

Q19 En déduire une expression de a_k (pour $1 \leq k \leq n$) faisant intervenir des factorielles et des puissances, mais débarassée de tout symbole \prod .

Q20 Vérifiez la validité de cette expression pour $n = 4$ et $k = 2$.

Q21 P_n admet-il des racines strictement négatives ?

Partie III : étude d'une primitive de φ

► Pour $x \geq 0$, nous noterons $f(x) = \int_0^x \varphi(t) dt$.

Q22 Justifiez l'existence de f ; quelle est la classe de continuité de f sur \mathbb{R}_+ ? sur \mathbb{R}_+^* ?

Q23 Quel est le sens de variation de f ?

Q24 Quelle est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

Q25 f est-elle convexe ?

► Nous nous proposons de déterminer un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q26 Énoncez la formule d'intégration par parties. On ne demande pas la preuve.

Q27 Avec une intégration par parties *rigoureusement* justifiée, établissez :

$$f(x) = 2\sqrt{x} \varphi(x) - \int_1^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} dt + \mathcal{O}(1) \quad \text{lorsque } x \text{ tend vers } +\infty$$

Q28 Établissez : $\int_1^{x/2} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} dt = o(\sqrt{x} \varphi(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q29 Établissez : $\int_{x/2}^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} dt = o(f(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q30 Concluez !

Q31 Donnez l'allure de la courbe représentative de f .

Partie IV : algèbre linéaire

► Notons \mathcal{L} l'application qui, à $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ associe $\mathcal{L}(g) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ définie par $(\mathcal{L}(g))(x) = \int_0^x g(t)\varphi(t) dt$.

Q32 Justifiez *brièvement* l'existence de $\mathcal{L}(g)$, puis l'appartenance de $\mathcal{L}(g)$ à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Q33 Parmi les notations $\mathcal{L}(g)$, $(\mathcal{L}(g))(x)$ et $\mathcal{L}(g(x))$, lesquelles ont un sens ?

Q34 Prouvez que \mathcal{L} est un endomorphisme du \mathbb{R} -e.v. $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Q35 \mathcal{L} est-il surjectif ?

Q36 \mathcal{L} est-il injectif ?