Sup PCSI2 — Contrôle 1997/09

Exercice 1

► Nous nous intéressons à la courbe Γ dont une représentation paramétrique est $x(t) = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y(t) = \dfrac{t}{t^2-1}$.

Q1 Étudiez les branches infinies de Γ ; en particulier, vous ferez apparaître une asymptote oblique $\mathcal{D}$ dont vous préciserez la place par rapport à Γ.

Q2 Explicitez $x'(t)$ et $y'(t)$, en déduire le tableau des variations de x et y. La courbe possède-t-elle des points stationnaires ?

Q3 Déterminez le paramètre, puis les coordonnées du point d'intersection A de $\mathcal{D}$ et Γ.

Q4 Déterminez les coordonnées du point double B en résolvant le système $\begin{cases} x(t) = x(u) \\ y(t) = y(u) \\ t \neq u \end{cases}$

Q5 Que pouvez-vous dire des tangentes à Γ en ce point B ?

Q6 Explicitez $x''(t)$ et $y''(t)$, puis factorisez $\gamma(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)$.

Q7 Montrez que l'équation $\gamma(t) = 0$ possède une (et une seule) racine réelle, que nous noterons α.

Q8 Donnez un encadrement raisonnable de α, puis estimez les coordonnées du point C de Γ de paramètre α. Que pouvez-vous dire du point C ?

Q9 Quelle est l'interprétation géométrique du signe de $\gamma(t)$?

Q10 Construisez une représentation graphique de Γ ; vous ferez apparaître ses asymptotes ; l'unité sera égale à 2 cm.

Exercice 2

► Notons $f : x \geqslant 1 \mapsto \displaystyle\int_1^x \sqrt{t\ln(t)}\,dt$.

Q1 Justifiez l'existence de la fonction f.

Q2 Quelle est la classe de continuité de f ?

Q3 Quelle est la classe de continuité de la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$?

Q4 Quel est le sens de variation de f ?

Q5 Montrez que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que vous préciserez.

Q6 Pour $x \in J$, justifiez l'inégalité $f^{-1}(x) \geqslant \sqrt{2x+1}$.

Q7 Énoncez puis démontrez la formule d'intégration par parties.

Q8 Au moyen d'une intégration par parties *soigneusement justifiée*, montrez que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2x\sqrt{x\ln(x)}}{3}$$

Q9 Donnez un équivalent *simple* de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 (par valeurs supérieures, bien entendu).