Partie 1

Q1 Donnez une expression *simple* de $\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(2k-1)$.

► On note $f : t\in\mathbb{R}\mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}$.

Q2 Justifiez l'appartenance de f à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Q3 Explicitez $f'(t)$ et $f''(t)$. Les calculs devront figurer sur votre copie.

► Vous pourrez identifier $P\in\mathbb{R}[X]$ et la fonction polynôme qui lui est associée. Tous les polynômes seront écrits selon les puissances décroissantes.

Q4 Montrez que $f^{(n)}(t)=\dfrac{P_n(t)}{(t^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$ où P_n est un polynôme dont vous préciserez (en fonction de n) le degré, la parité, et le coefficient dominant α_n.

Q5 La question précédente a mis en évidence une relation exprimant P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n ; utilisez cette relation *à l'exclusion de toute autre* pour déterminer P_1, P_2, P_3 et P_4. Les calculs devront figurer sur votre copie.

Q6 Donnez une expression *simple* de $P_n(i)$.

Partie 2

Q7 Énoncez la *formule de* Leibniz pour la dérivée n-ième du produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$. On ne demande pas la démonstration.

Q8 Montrez que f est solution d'une équation différentielle *très simple*.

Q9 En déduire une relation entre P_n, P_{n+1} et P_{n+2}.

Q10 Donnez une expression *simple* de $P_{2n}(0)$.

Q11 Justifiez l'affirmation suivante : $P_n(1)$ ne peut être nul.

Q12 Exprimez P'_{n+1} en fonction de P_n.

Q13 Montrez que P_n est solution d'une équation différentielle du deuxième ordre.

► Dans les trois questions suivantes, n est un naturel fixé.

Q14 Justifiez l'affirmation suivante : « on peut écrire $P_n=\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} a_k X^{n-2k}$ ».

Q15 Établissez une relation entre a_k et a_{k+1}.

Q16 En déduire une expression de a_k débarrassée de tout symbole $\prod$.

Partie 3

Q17 Démontrez le *théorème de Rolle généralisé* : si f, continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$, dérivable dans l'intervalle $]a,+\infty[$, possède en $+\infty$ une limite égale à $f(a)$, alors il existe $c>a$ tel que $f'(c)=0$.

Q18 En utilisant ce théorème, prouvez que P_n possède exactement n racines réelles, distinctes, qui de plus séparent les racines de P_{n+1}.

► Pour $n\geqslant 2$, on note ξ_n la plus petite racine strictement positive de P_n.

Q19 Explicitez ξ_2, ξ_3 et ξ_4. Les calculs devront figurer sur votre copie.

Q20 Justifiez : ξ_{2n+1} majore strictement ξ_{2n} et ξ_{2n+2}.

Q21 Comparez ξ_{4n} et ξ_{4n+2}, puis ξ_{4n+2} et ξ_{4n+4}.