Sup PCSI2 — Contrôle 1997/07

## Exercice 1

▶ Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$, $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(3x)$, $h : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ et $k : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(3x)$ et $= \left\{ af + bg + ch + dk \;\middle|\; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$. Pour faciliter la rédaction, vous pourrez noter $\varphi_{a,b,c,d}$ la fonction $af + bg + ch + dk$.

Q1 $\mathcal{B} = (f, g, h, k)$ est-elle une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ?

Q2 Montrez que  est un s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Q3 La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de  ?

Q4 La fonction $p : x \mapsto \sin^3(x) - \cos^3(x)$ appartient-elle à  ?

Q5 La fonction $q : x \mapsto 1$ appartient-elle à  ?

Q6 La fonction $\mathcal{D} : \varphi \mapsto \varphi'$ est-elle un endomorphisme de  ?

Q7 Quelle est la matrice M de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$ ?

Q8 Pour $n \in \mathbb{N}$, explicitez $\mathrm{M}^n$ ; vous distinguerez deux cas de figure, selon la parité de $n$.

Q9 La fonction $\mathcal{D}$ est-elle un automorphisme de  ?

Q10 Explicitez la matrice inverse $\mathrm{M}^{-1}$ de M.

## Exercice 2

▶ $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ sont deux suites de réels. Vous devez répondre à chacune des questions suivantes par OUI (preuve à l'appui) ou par NON (contre-exemple à l'appui).

Q1 On suppose que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ et que $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée. Peut-on en déduire $u_n = o(v_n)$ ?

Q2 On suppose que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0 et que $(v_n)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas vers 0. Peut-on en déduire $u_n = o(v_n)$ ?

Q3 On suppose que $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ et qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $v_n \geqslant A$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Peut-on en déduire $\sin(u_n) = o\big(\sin(v_n)\big)$ ?

Q4 On supose que les suites $u$ et $v$ sont toutes deux décroissantes, à termes strictement positifs, convergent vers 0 et vérifient $u_n = o(v_n)$. Peut-on en déduire que $U_n = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k$ est négligeable devant $V_n = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} v_k$ ?

Q5 On supose que les suites $u$ et $v$ sont toutes deux croissantes, à termes strictement positifs, divergent vers $+\infty$ et vérifient $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$. Peut-on en déduire $\ln u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \ln v_n$ ?

Q6 On supose que les suites $u$ et $v$ sont toutes deux croissantes, à termes strictement positifs, divergent vers $+\infty$ et vérifient $u_n = o(v_n)$. Peut-on en déduire $\ln(u_n) = o\big((\ln(v_n)\big)$ ?

Q7 On supose que les suites $u$ et $v$ sont toutes deux croissantes, à termes strictement positifs, divergent vers $+\infty$ et vérifient $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$. Peut-on en déduire $\cos u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \cos v_n$ ?

Q8 On supose que les suites $u$ et $v$ sont toutes deux croissantes, à termes strictement positifs, divergent vers $+\infty$ et vérifient $\sin u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \sin v_n$. Peut-on en déduire $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} v_n$ ?