Exercice 1

▶ Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k!}$; nous savons que $e = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Q1 Justifiez la majoration $S_n < e$.

Q2 Pour $p \geqslant 2$, justifiez la majoration $S_p + \frac{1}{p} \geqslant e$.

▶ Nous étudions la fonction f qui, au réel x, associe $f(x) = e^x + x$.

Q3 A-t-on $f(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} f(x)$?

Q4 Justifiez *rapidement* l'affirmation suivante : f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

▶ L'équation $f(x) = 0$ possède donc une unique solution réelle, que nous noterons ξ.

Q5 En utilisant les résultats des questions 1 et 2, donnez un encadrement de ξ.

▶ Nous noterons $\lceil x \rceil$ la « partie entière supérieure » du réel x, c'est-à-dire le plus petit relatif supérieur ou égal à x ; nous avons donc $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ et $\lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$.

▶ Pris d'un accès de générosité aussi subit qu'inattendu, le correcteur décide d'accorder une prime pour récompenser les étudiants qui auront obtenu un encadrement « serré » de ξ. Pour ce faire, il applique la formule $= \left\lceil -\frac{\ln(M-m)}{\ln(2)} \right\rceil$ dans laquelle m (resp. M) est le minorant (resp. le majorant) de ξ.

Q6 La prime peut-elle être strictement négative ?

Q7 Montrez que la prime est d'autant plus grande que l'amplitude de l'intervalle $[m, M]$ est petite.

Q8 Avec cette formule, quelle serait votre prime ?

▶ Nous nous intéressons maintenant à la bijection réciproque de f, que nous noterons g. Nous avons donc $y = g(x)$ ssi $x = f(y)$.

Q9 Montrez que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q10 Donnez un équivalent *simple* de $g(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Q11 A-t-on $g(x+1) \underset{x\to-\infty}{\sim} g(x)$?

Q12 Justifiez l'affirmation suivante : lorsque x tend vers $+\infty$, $g(x)$ est équivalent à $\ln(x)$.

Q13 A-t-on $g(x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$?

Q14 $\star\star$ Donnez un équivalent *simple* de $g(x) - \ln(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q15 Rappelez l'expression de $(f^{-1})'$; en déduire l'expression de g' en fonction de f' et g, puis celle de g'' en fonction de f', f'' et g.

Q16 $\star$ Explicitez le $DL_2(1)$ de g.

Exercice 2

▶ f, g et h sont trois endomorphismes d'un même $\mathbb{K}$-e.v. E qui vérifient $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

Q1 Montrez que f, g et h ont même noyau et même image.

Q2 Établissez $f^2 = g^2 = h^2$; bien entendu, f^2 désigne $f \circ f$.

Q3 Établissez $g^5 = g$ (considérez $f^2 g f^2$).

Q4 Prouvez que $E = \ker(g) \oplus \mathrm{im}(g)$.

Q5 Prouvez que $\mathrm{im}(f)$ est stable par f, g et h.

Q6 Prouvez que les endomorphismes de $\mathrm{im}\, f$ induits par f, g et h sont des automorphismes.