

- Notons $\lceil x \rceil$ le plus petit relatif supérieur ou égal au réel x ; nous avons donc $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$ et $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$. La partie entière de x est notée $\lfloor x \rfloor$ comme il est d'usage.

Partie I

- Q1 Montrez que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \lceil x \rceil$ est croissante.
- Q2 Justifiez : $\lceil x \rceil < \lceil y \rceil \Rightarrow x < y$.
- Q3 La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \lceil x \rceil$ est-elle strictement croissante ?
- Q4 Pour $x \in \mathbb{R}$, justifiez la relation $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$.
- Q5 Pour $n \in \mathbb{Z}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établissez $\lceil \alpha n \rceil + \lfloor (1 - \alpha)n \rfloor = n$.
- Q6 Justifiez : $2 \leq \left\lceil \frac{2n}{3} \right\rceil < n$ dès que le naturel n est au moins égal à 3.
- Q7 Soient a et b deux naturels non nuls, et x un réel ; établissez $\left\lceil \frac{\lceil x/a \rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{x}{ab} \right\rceil$.

Partie II

- Nous nous intéressons à une suite $(C_n)_{n \geq 2}$ vérifiant $C_2 = 1$ et $C_n = 3C_{\lceil 2n/3 \rceil}$ pour $n \geq 3$.

- Q8 Montrez que ces relations définissent *effectivement* une suite de naturels.
- Q9 Rédigez une fonction Maple qui calcule C_n en fonction de n .
- Q10 Calculez C_n pour $n \in \llbracket 3, 12 \rrbracket$; vous présenterez les résultats dans un tableau résumant, de façon concise mais explicite, les calculs (lesquels ne devront pas figurer sur votre copie).
- Q11 Montrez que C_{n+1} est égal, soit à C_n , soit à $3C_n$.
- Q12 Quel est le sens de variation de la suite $(C_n)_{n \geq 2}$?

Partie III

- Notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion suivante :

« Pour $2n \leq k < 3n$, on a $C_k \geq k^2$ »

- Q13 Soit $n \geq 3$; montrez que, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
- Q14 Exhibez un indice n tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.
- Q15 Montrez que $C_n \geq n^2$ dès que n est au moins égal à un indice n_1 que vous déterminerez. Quelle conclusion pouvez-vous en tirer, concernant le comportement de la suite $(C_n)_{n \geq 2}$?
- Q16 Montrez qu'il existe une infinité d'indices n tels que $C_{n+1} = 3C_n$.
- Q17 Comparez C_{3k+2} et C_{3k+3} .
- Q18 Existe-t-il un exposant β tel que $C_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n^\beta$?

Partie IV

► Notons $\beta = \frac{\ln 3}{\ln \frac{3}{2}}$.

Q19 Justifiez (sans recours à une calculatrice) l'encadrement $2 < \beta < 3$.

Q20 Combien vaut $3\left(\frac{2}{3}\right)^\beta$?

Q21 Notons $f : n \geq 2 \mapsto \left(\frac{n}{2}\right)^\beta$. Montrez que $C_n \geq f(n)$ pour tout $n \geq 2$.

Q22 Notons $g : n \geq 4 \mapsto 9(n-3)^\beta$. Montrez que $C_n \leq g(n)$ pour tout $n \geq 4$.

Q23 Quelle(s) relation(s) pouvez-vous alors écrire entre les suites $(C_n)_{n \geq 2}$ et $(n^\beta)_{n \geq 2}$?

Partie V

► Nous nous proposons de généraliser le résultat précédent. Soient $A > 1$ et $\alpha \in]0, 1[$. Notons E l'ensemble des naturels n qui vérifient $n > \lceil n\alpha \rceil$.

Q24 Montrez que E n'est pas vide.

Q25 Explicitez, en fonction de α , le plus petit élément n_α de E .

Q26 Montrez que $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_\alpha\}$.

► Nous nous intéressons désormais aux suites $(D_n)_{n \geq 1}$ qui vérifient la relation de récurrence $D_n = AD_{\lceil n\alpha \rceil}$ pour tout $n \geq n_\alpha$.

Q27 L'ensemble \mathcal{D} de ces suites peut-il être muni d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel ?

► Dans la suite, $(D_n)_{n \geq 1}$ désigne un élément de \mathcal{D} .

Q28 Montrez que, si l'on connaît les termes d'indice compris entre 1 (inclus) et n_α (exclu), on peut calculer tous les termes de cette suite.

Q29 Supposons qu'il existe des réels k et β strictement positifs tels que $D_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} kn^\beta$. Quelle doit être la valeur de β ?

► Dans la suite, β désigne le réel que vous venez de déterminer. Supposons $D_n > 0$ pour tout n compris entre 1 (inclus) et n_α (exclu).

Q30 Déterminez un réel $K > 0$ tel que $D_n \geq Kn^\beta$ pour tout $n \geq 1$.

Q31 Déterminez de même des réels $M > 0$ et $\lambda > 0$ tels que $D_n \leq M(n-\lambda)^\beta$ pour tout $n \geq n_\alpha$.

Q32 Quelle(s) relation(s) pouvez-vous alors écrire entre les suites $(D_n)_{n \geq 2}$ et $(n^\beta)_{n \geq 2}$?

Q33 Il existe en informatique une structure de donnée appelée $2d$ -arbre. Voici un exemple de situation où cette structure peut être utilisée : une carte géographique étant présentée sur un écran d'ordinateur, on utilise le *rectangle de sélection* pour délimiter une zone ; on veut déterminer rapidement combien de villes sont situées dans ce rectangle.

Lorsque l'on veut évaluer le coût d'une recherche dans un tel arbre répertoriant n points, on est amené à étudier une suite $(Q_n)_{n \geq 1}$ définie par les relations $Q_1 = 1$ et $Q_n = 2 + 2Q_{\lceil n/4 \rceil}$ pour $n \geq 2$. Quelle estimation asymptotique de Q_n pouvez-vous donner ?