Exercice

► Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est VRAIE (preuve à l'appui) ou FAUSSE (contre-exemple à l'appui).

Q1 Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors la suite la suite de terme général $\sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k$ converge aussi.

Q2 Si la suite de terme général $\sin(u_n)$ converge vers 0, alors la suite de terme général u_n converge également vers 0.

Q3 Si la suite de terme général $\exp(u_n)$ est bornée, alors la suite de terme général u_n est également bornée.

Q4 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels. Si u_n est un $\mathcal{O}(v_n)$ lorsque n tend vers l'infini, alors $\exp(u_n)$ est un $\mathcal{O}\big(\exp(v_n)\big)$.

Q5 Si la suite de terme général u_n diverge vers $+\infty$, elle est croissante à partir d'un certain rang.

Q6 Si la suite de terme général u_n est bornée, alors la suite de terme général $\tan(u_n)$ est également bornée.

Problème

Partie 1

► Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}$ et $r_n = H_n - \ln n$.

Q1 Pour $k\geqslant 2$, établissez $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

Q2 En déduire $\ln n \leqslant H_n \leqslant 1+\ln n$.

Q3 Quel est le sens de variation de la suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$?

Q4 Montrez que la suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$ converge ; nous noterons γ sa limite.

► Pour $k\geqslant 2$, notons $v_k = \int_{k-1}^{k} \frac{t-k+1}{t^2}\,dt$.

Q5 Justifiez l'encadrement $0\leqslant v_k \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

Q6 Montrez que la suite de terme général $V_n = \sum_{2\leqslant k\leqslant n} v_k$ converge.

Q7 Pour $n\geqslant 1$, justifiez : $\lim_{p\to\infty}\Big(\sum_{k=n+1}^{p} v_k\Big) = r_n - \gamma$.

Q8 En déduire $0\leqslant r_n-\gamma\leqslant \frac{1}{n}$.

Tournez S.V.P.

Partie 2

► L'encadrement qui conclut la première partie montre que la convergence vers γ de la suite de terme général r_n est trop lente ; nous nous proposons donc d'accélérer cette convergence.

$\boxed{\text{Q9}}$ Pour $k \geqslant 2$, notons $I_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x(1-x)(1-2x)}{(x+k-1)^4}\,dx$. Au moyen d'intégrations par parties répétées (et dûment justifiées), établissez :

$$I_k = 2v_k + \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{6}\Big(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\Big)$$

$\boxed{\text{Q10}}$ Toujours pour $k \geqslant 2$, notons $J_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{(x+k-1)^5}\,dx$. Justifiez :

$$J_k = v_k + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1}\Big) + \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{(k-1)^2} - \frac{1}{k^2}\Big)$$

$\boxed{\text{Q11}}$ Quel est le maximum de la fonction $x \in [0,1] \mapsto x(1-x)$?

$\boxed{\text{Q12}}$ Toujours pour $k \geqslant 2$, établissez : $0 \leqslant J_k \leqslant \dfrac{1}{64}\Big(\dfrac{1}{(k-1)^4} - \dfrac{1}{k^4}\Big)$.

$\boxed{\text{Q13}}$ En déduire, pour $n \geqslant 1 : 0 \leqslant r_n - \gamma - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2} \leqslant \dfrac{1}{64n^4}$

$\boxed{\text{Q14}}$ Quel développement asymptotique de H_n pouvez-vous en tirer ?

$\boxed{\text{Q15}}$ Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle vous pouvez affirmer que $r_n - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{12n^2}$ est une valeur approchée de γ avec une erreur au plus égale à $5 \cdot 10^{-7}$?