Exercice 1

Q1 Simplifiez $S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

Q2 Simplifiez $T_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(k+2)}$.

Q3 Simplifiez $U_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{\binom{n}{k}}{(k+1)(n+1-k)}$.

Exercice 2

► Pour $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ on définit $c(i,j)$ au moyen des relations $c(i,0) = c(0,j) = 1$ et

$$c(i+1,j+1) = c(i+1,j) + c(i,j+1) + c(i,j)$$

Q1 Dressez un tableau donnant les valeurs de $c(i,j)$ pour i et j compris entre 0 et 5 inclus ; vous devez trouver $c(5,5) = 1683$.

Q2 Donnez une expression simple de $x_i = c(i,1)$, puis de $y_i = c(i,2)$ et enfin de $z_i = c(i,3)$.

Q3 Justifiez l'affirmation suivante : $c(i,j) = c(j,i)$.

Q4 Justifiez l'affirmation suivante : $c(i,j) > 0$.

Q5 Justifiez l'affirmation suivante : $c(i,j) \leqslant c(i,j+1)$.

Q6 Justifiez l'affirmation suivante : $c(n,n) \geqslant 3^n$.

Q7 Exhibez un réel k tel que $c(n,n) \leqslant k^n$ pour tout naturel n ; bien entendu, il vous faudra *prouver* que k répond bien à la question !

Exercice 3

► Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$.

Q1 Calculez I_0 et I_1.

Q2 Quel est le sens de variation de la suite $\big(I_n\big)$?

Q3 Prouvez que la suite $\big(I_n\big)$ converge ; pouvez-vous, actuellement, préciser sa limite ?

Q4 Donnez un expression *très simple* de $I_{n+2} + I_n$.

Q5 En déduire la limite de la suite $\big(I_n\big)$.

Q6 Explicitez I_{2p} sous forme d'une somme. Indication : utilisez la relation établie à la question 4 pour effectuer un télescopage.

Q7 Explicitez de même I_{2p+1} sous forme d'une somme.

Q8 Calculez $G_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$, puis $G_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 4 (Concours ESTP/ESAM 1997)

Q1 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+iz)^5 = (1-iz)^5$.

Q2 En déduire les tangentes des nombres $\pi/5$ et $2\pi/5$ que vous mettrez sous la forme $\sqrt{p+q\sqrt{n}}$ où n, p et q sont éléments de $\mathbb{Z}$, puis celle de $\pi/10$.