Exercice 1

► Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1+t^2)$. Les *racines* d'une fonction polynôme P sont les solutions de l'équation $P(t) = 0$.

Q1 Explicitez $f'(t)$, $f''(t)$ et $f'''(t)$.

Q2 Justifiez l'appartenance de f à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q3 Montrez que, pour $n \geqslant 1 : f^{(n)}(t) = \dfrac{P_n(t)}{(1+t^2)^n}$ où P_n est une fonction polynôme dont vous préciserez le degré, la parité, et le coefficient dominant. Vous raisonnerez par récurrence, et on écrira une relation liant P_{n+1}, P_n et P_n'.

Q4 Explicitez P_n pour $1 \leqslant n \leqslant 5$; donnez les racines de chacune de ces fonctions polynômes, sous la forme la plus simple possible.

Q5 En observant $f'(t)$ et $f''(t)$, exhibez deux fonctions polynômes p et q *très simples* telles que $pf' = qf''$.

Q6 En appliquant alors la formule de Leibniz (que vous citerez précisément), obtenez une relation liant $f^{(n)}$, $f^{(n+1)}$, $f^{(n+2)}$ et $f^{(n+3)}$.

Q7 En déduire une relation entre P_n, P_{n+1}, P_{n+2} et P_{n+3}.

Q8 Vérifiez la validité de la formule obtenue, pour $n = 1$ puis pour $n = 2$.

Q9 Soit a un complexe non réel, et $n \in \mathbb{N}$. Explicitez la dérivée n-ième de $t \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{1}{t-a}$ (ceci est une question de cours).

Q10 En notant que $\dfrac{2t}{1+t^2} = \dfrac{1}{t+i} + \dfrac{1}{t-i}$, obtenez une expression de P_n.

Q11 Utilisez cette expression pour montrer que P_n possède exactement n racines, et que celles-ci sont réelles et distinctes ; vous expliciterez ces solutions, bien entendu.

Q12 Vérifiez la cohérence des résultats obtenus pour $n = 3$.

Q13 Déterminez la valeur de $\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Q14 Pour $n \geqslant 1$, notons $\mathbf{v}_n = P_n(i)$. Établissez la relation $\mathbf{v}_{n+1} = -2ni\mathbf{v}_n$; en déduire une expression simple de $\mathbf{v}_n$. Vous vérifierez la validité de la relation obtenue, pour $n = 4$ et $n = 5$.

Exercice 2

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$; pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, notons $\zeta_{n,k} = \exp\left(\dfrac{2ki\pi}{n}\right)$. Notons $\mathbb{U}_n = \left\{\zeta_{n,k} \mid k \in [\![0,n-1]\!]\right\}$ l'ensemble des racines n-ièmes complexes de 1. Vous pourrez écrire ζ_k au lieu de $\zeta_{n,k}$, afin d'alléger les écritures.

$\boxed{\text{Q1}}$ Rappelez la valeur de $S_n = \sum\limits_{0 \leqslant k < n} \zeta_{n,k}$, preuve à l'appui (ceci est une question de cours).

$\boxed{\text{Q2}}$ Simplifiez $T_n = \sum\limits_{1 \leqslant k < n} \dfrac{1}{\zeta_{n,k}}$ puis $P_n = \prod\limits_{0 \leqslant k < n} \zeta_{n,k}$.

► Les questions qui suivent sont indépendantes des précédentes. Elles doivent toutefois être rédigées sur une même copie.

$\boxed{\text{Q3}}$ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 4iz^3 + (3-12i)z^2 - (24+14i)z + 12 - 36i = 0$ sachant que, parmi ses solutions, deux sont imaginaires pures. Que pouvez-vous dire du quadrilatère dont les sommets sont les images, dans le plan complexe, des solutions de l'équation ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $\sum\limits_{0 \leqslant k < n} \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^k = 0$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit $a \in \mathbb{R}$; exprimez $\sin(5a)$ en fonction de $\sin(a)$. En déduire la valeur de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.