Sup PCSI2 — Contrôle 1997/01

Exercice 1

► Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Q1 Deux réels a et b vérifient $a^3 + 3a = b^3 + 3b$. Peut-on en déduire $a = b$?

Q2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $C_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. Donnez une expression simple de C_n ; en déduire la limite de $\frac{C_n}{n}$ lorsque n tend vers l'infini. Vous pourrez utiliser la formule $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

Q3 Donnez une expression *simple* de $A_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{k}{2^k}$, puis de $B_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{k}{2^{n-k}}$.

Exercice 2

► Les questions de cet exercice sont indépendantes.

Q1 Simplifiez $g(x) = \cos\big(\arctan(x)\big)$.

Q2 Écrivez le réel $A = \arctan(2) + \arctan(3) + \arctan(4)$ au moyen d'un seul arc tangente (et, au besoin, d'un multiple de π).

Q3 Déterminez l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$, puis donnez une expression *simple* de $f(x)$, faisant intervenir $\arccos x$. Vous pourrez distinguer deux cas de figure.

Q4 Montrez que l'équation $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \arctan(kx) = 2n$ n'a pas de solution réelle.

Q5 Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arcsin(x) + \arcsin(2x) = \frac{2\pi}{3}$.

Q6 Discutez en fonction de la valeur du paramètre α le nombre de solutions de l'équation $\arcsin(x) - \arccos(x) = \alpha$.

Tournez S.V.P.

Exercice 3

► $\lfloor x \rfloor$ désigne la *partie entière* du réel x, c'est-à-dire le plus grand relatif inférieur ou égal à x.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvez l'inégalité $\left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor \leqslant n$.

► Nous nous intéressons à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et la relation $u_n = 1 + u_{\lfloor n/2 \rfloor}$. Vous noterez bien qu'il n'est pas immédiat que ceci définit *effectivement* une suite de réels.

$\boxed{\text{Q2}}$ Recopiez le tableau suivant, en le complétant ; les calculs ne doivent pas apparaître sur votre copie.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lfloor n/2 \rfloor$	0	0	1	1	2						
$u_{\lfloor n/2 \rfloor}$	0	0	1	1	2						
u_n	0	1	2	2	3						

$\boxed{\text{Q3}}$ Calculez u_{76}. Bien entendu, il n'est pas conseillé de calculer les 75 valeurs précédentes...

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que, si l'on connaît u_k pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, alors on peut calculer u_{n+1}.

► Ceci prouve que les deux relations de l'énoncé définissent *effectivement* une suite de réels.

$\boxed{\text{Q5}}$ Que vaut $u_{2p+1} - u_{2p}$?

$\boxed{\text{Q6}}$ Quelles sont les valeurs que peut prendre $u_{2p+2} - u_{2p+1}$?

$\boxed{\text{Q7}}$ Quel est le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$\boxed{\text{Q8}}$ Soient p et n deux naturels. Montrez que, si l'on a $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$, alors $u_n = p + 1$.

$\boxed{\text{Q9}}$ En déduire une expression *simple* de u_n en fonction de n, pour $n \geqslant 1$. Vous ferez intervenir les fonctions « partie entière » et « logarithme ».

$\boxed{\text{Q10}}$ Avec ou sans cette formule, calculez u_{2008}.