Sup PCSI2 — Contrôle 1996/09

Exercice 1

► Notons $f : x \in [-1, +\infty[\mapsto \sqrt{1+x}$.

Q1 Justifiez : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-1, +\infty[$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$. Explicitez $f^{(n)}(0)$; le résultat ne devra contenir aucun signe $\prod$; il pourra utiliser des factorielles et/ou des puissances, bien entendu.

► Notons $g : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 3x^3}$.

Q3 Déterminez l'ensemble de définition de g, puis le plus grand intervalle contenu dans $\mathbb{R}^+$ sur lequel g est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q4 Déterminez le coefficient de x^{1997} dans la partie régulière du $DL_{1997}(0)$ de la restriction de g à $\mathbb{R}^+$. Le résultat ne devra contenir aucun signe $\prod$; il pourra utiliser des factorielles et/ou des puissances, bien entendu.

Exercice 2

Q1 Montrez que les relations $c_0 = 1$ et $c_n = 2n - 1 + \dfrac{2}{n} \displaystyle\sum_{0 \leqslant k < n} c_k$ définissent *effectivement* une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels.

Q2 Calculez c_n pour $n \in [\![1,5]\!]$; les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles. Vous vérifierez (pas sur la copie) que $c_6 = \frac{168}{5}$.

Q3 Proposez une fonction Maple calculant c_n.

Q4 Simplifiez $u_n = (n+1)c_{n+1} - nc_n$, puis $v_n = \dfrac{c_{n+1}}{n+2} - \dfrac{c_n}{n+1}$.

Q5 En déduire une expression simple de c_n, faisant intervenir $H_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}$.

Q6 Rappel : $H_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ où γ est la *constante d'Euler*. Donnez un développement asymptotique de c_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 3

► Notons $p : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x)$, $q : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(2x)$, $r : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)$ et $s : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(2x)$.

Q1 $\mathcal{B} = (p, q, r, s)$ est-elle une famille libre du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Q2 Soient a et b deux réels. Montrez qu'il existe un réel φ tel que $a\cos(u) + b\sin(u) = \sqrt{a^2+b^2}\cos(u - \varphi)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Vous noterez bien que φ ne dépend pas de u.

► Soient a, b, α et β quatre réels. Notons $k_{a,b,\alpha,\beta} : x \in \mathbb{R} \mapsto a\cos(x - \alpha) + b\cos(2x - \beta)$. Notons l'ensemble des $k_{a,b,\alpha,\beta}$, où (a, b, α, β) appartient à $\mathbb{R}^4$.

Q3 $\star$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Q4 La famille $\mathcal{B}$ est-elle une base de ?

Q5 La fonction $g : x \mapsto \sin^2(x) - \cos^2(x)$ appartient-elle à ?

Q6 La fonction $h : x \mapsto 1$ appartient-elle à ?

Q7 La fonction $\mathcal{D} : f \mapsto f'$ est-elle un endomorphisme de ?

Q8 Quelle est la matrice $\mathbf{M}$ de $\mathcal{D}$ dans la base $\mathcal{B}$?

Q9 La fonction $\mathcal{D}$ est-elle un automorphisme de ?

Q10 Quelle est la matrice inverse $\mathbf{M}^{-1}$ de $\mathbf{M}$?