Sup PCSI2 — Contrôle 1996/08

Les questions marquées $\star\star\star$ sont assez longues, et seront en conséquence bien payées.

Les questions incomplètement rédigées, ou trop sales, ne seront pas corrigées.

Problème 1

► Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. Notons $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ s'il existe un réel $A > 0$ et un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n| \leqslant A|v_n|$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Q1 Dans cette question, nous supposons que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $x_n = \mathcal{O}(y_n)$. A-t-on $u_n + x_n = \mathcal{O}(v_n + y_n)$?

Q2 Dans cette question, nous supposons que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ et $x_n = \mathcal{O}(y_n)$. A-t-on $u_n x_n = \mathcal{O}(v_n y_n)$?

► Dans les trois questions suivantes, nous supposons que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.

Q3 A-t-on $e^{u_n} = \mathcal{O}\big(e^{v_n}\big)$?

Q4 A-t-on $\cos(u_n) = \mathcal{O}\big(\cos(v_n)\big)$?

Q5 Nous supposons de plus que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à termes strictement positifs. A-t-on $\ln u_n = \mathcal{O}(\ln v_n)$?

Problème 2

Q1 Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; soient u et v deux éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Justifiez l'existence de la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

Justifiez également la dérivabilité de g.

► Dans toute la suite, nous prenons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\, dt$.

Q2 Explicitez $g'(x)$.

Q3 $\star$ En déduire le développement limité à l'ordre 5 de g au voisinage de 0.

Q4 Quelle est la parité de g ?

Q5 Pour $x \neq 0$, établir $g\Big(\dfrac{1}{2x}\Big) = g(x)$.

Q6 Pour $t \neq 0$, établissez l'encadrement $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

Q7 En déduire, pour $x > 0$, l'encadrement $\arctan(2x) - \arctan(x) \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$.

Q8 $\star$ Soit $H : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \big(\arctan(2t) - \arctan(t)\big)\, dt$. Explicitez $H(x)$ et calculez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{\ln(x)}$.

Q9 $\star$ Déduisez de l'étude précédente un équivalent *simple* de $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\, dt$ lorsque x tend $+\infty$.