Sup PCSI2 — Contrôle 1996/06

Problème 1

► E est un $\mathbb{K}$-e.v. $\mathcal{L}(E)$ est la $\mathbb{K}$-algèbre des endomorphismes de E, $\mathcal{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E. Notons **id** l'endomorphisme identité. f^k est défini par $f^0 = \mathbf{id}$ et $f^{k+1} = f \circ f^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Q1 Soient f et g deux endomorphismes de E. Comparez $\ker(f)$ et $\ker(g \circ f)$, puis $\operatorname{im}(f)$ et $\operatorname{im}(f \circ g)$.

Q2 Soient f et g deux endomorphismes de E. Supposons que $f \circ g \circ f = f$. Que pouvez-vous dire de $f \circ g$ et $g \circ f$?

► Soient f et g deux endomorphismes de E. Nous dirons que g est un *pseudo-inverse* de f lorsque les trois conditions suivantes sont simultanément vérifiées :

(i) $f \circ g \circ f = f$
(ii) $g \circ f \circ g = g$
(iii) $f \circ g = g \circ f$

Q3 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ possèdant deux pseudo-inverses g et h. En évaluant $f \circ g \circ f \circ h$, prouvez que $f \circ h = g \circ f$, puis que $g = h$.

► Nous avons montré que, s'il existe, le pseudo-inverse de f est unique.

Q4 Quel est le pseudo-inverse d'un projecteur p ?

Q5 Soient f et g deux endomorphisme de E qui commutent : $f \circ g = g \circ f$. Montrez que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, g et f^k commutent. Vous raisonnerez par récurrence.

Q6 Soit f un élément de $\mathcal{L}(E)$ possèdant un pseudo-inverse g. Prouvez que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f^k possède un pseudo-inverse, dont vous donnerez l'expression en fonction de g et k.

Q7 Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ possèdant un pseudo-inverse g, et h un automorphisme de E. Prouvez que $h \circ f \circ h^{-1}$ possède un pseudo-inverse, dont vous donnerez l'expression en fonction de g et h.

► Dans les quatre questions suivantes, f désigne un élément de $\mathcal{L}(E)$ tel que $E = \ker(f) \oplus \operatorname{im}(f)$.

Q8 Un(e) de vos camarades affirme que f est un projecteur. Que pensez-vous de son affirmation ?

Q9 Soit $u \in E$. Montrez qu'il existe un et un seul $w \in \operatorname{im}(f)$ tel que $f(w) - u \in \ker(f)$.

► Définissons alors $g : E \to E$ par $g(u) = w$.

Q10 Prouvez que $g \in \mathcal{L}(E)$.

Q11 Prouvez que g est le pseudo-inverse de f.

► Dans les trois questions suivantes, f est un endomorphisme de E possèdant un pseudo-inverse g.

Q12 Établissez l'égalité $\operatorname{im}(f) = \operatorname{im}(g)$.

Q13 Établissez l'égalité $\ker(f) = \ker(g)$.

Q14 Montrez que $f \circ g$ est le projecteur sur $\operatorname{im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.

► Dans les trois questions suivantes, f, h et k sont trois endomorphismes de E qui vérifient $f^2 \circ h = k \circ f^2 = f$.

Q15 Établissez l'égalité $k \circ f \circ h = f \circ h^2 = k^2 \circ f$.

Q16 Établissez l'égalité $f \circ h = k \circ f$.

Q17 Montrez que $k \circ f \circ h$ est le pseudo-inverse de f.

Tournez S.V.P.

Problème 2

► Rappels : pour $0 \leqslant k \leqslant n$, nous notons $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Pour i et j relatifs, nous notons $\delta_{i,j}$ le réel égal à 1 si $i = j$, à 0 dans le cas contraire.

$\boxed{\text{Q1}}$ Pour $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$, donnez une autre écriture du produit $\binom{n}{p}\binom{p}{k}$, faisant intervenir deux coefficients binomiaux.

► $\mathbf{E}$ désigne le $\mathbb{R}$-e.v. des suites de réels. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathbf{E}$; définissons la suite $\mathcal{T}(u)$ par :

$$\big(\mathcal{T}(u)\big)_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k \binom{n}{k} u_k \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Vous noterez bien que $\mathcal{T}$ associe, à une suite de réels, une autre suite de réels.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si u est une suite de réels, la notation $\mathcal{T}(u_n)$ a-t-elle un sens ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que l'application $\mathcal{T}$ est un endomorphisme de $\mathbf{E}$.

► Dans les cinq questions suivantes, l'expression « expliciter $\mathcal{T}(u)$ » signifie « donner l'expression, en fonction de n, du terme général $\big(\mathcal{T}(u)\big)_n$ de la suite $\mathcal{T}(u)$ ». Il va de soi que cette expression devra être *la plus simple possible*.

$\boxed{\text{Q4}}$ Explicitez $\mathcal{T}(u)$ lorsque u est la suite définie par $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Explicitez $\mathcal{T}(u)$ lorsque u est la suite définie par $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Explicitez $\mathcal{T}(u)$ lorsque u est la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Fixons $x \in \mathbb{R}$. Explicitez $\mathcal{T}(u)$ lorsque u est la suite définie par $u_n = x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Fixons $p \in \mathbb{N}$. Explicitez $\mathcal{T}(u)$ lorsque u est la suite définie par $u_n = \dbinom{n}{p}$ pour tout $n \geqslant p$, et $u_n = 0$ pour tout $n < p$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Justifiez la relation $\mathcal{T} \circ \mathcal{T} = \mathrm{Id}_{\mathbf{E}}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Exhibez un élément u de $\mathbf{E}$, autre que la suite nulle, vérifiant $\mathcal{T}(u) = -u$.