Problème 1 (un parfum de déjà vu)

► Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Notons $M(f) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \big|f(t)\big|$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

Q1 Justifiez la majoration $|I_n| \leqslant \dfrac{M(f)}{n+1}$. En déduire la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

Q2 En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, obtenez une autre majoration de I_n ; comparez cette majoration à la précédente.

Q3 Que pouvez-vous dire de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si f est à valeurs positives ou nulles ?

► Désormais, nous supposons $f(t) = \dfrac{1}{t^3+1}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Q4 Écrivez une relation *très simple* entre I_{n+3} et I_n.

Il est vivement conseillé de mener les calculs des questions suivantes avec le plus grand soin.

Q5 Déterminez des réels a, b et c tels que $\dfrac{1}{t^3+1} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{bt+c}{t^2-t+1}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Q6 Calculer $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\,dt$.

Q7 Calculez $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1}$ au moyen du changement de variable $u = t - \dfrac{1}{2}$. Le résultat sera écrit sous la forme la plus simple possible.

Q8 En déduire la valeur de I_0 ; le résultat fait intervenir $\ln 2$, π et $\sqrt{3}$.

Q9 Déduisez des résultats de Q4 et Q8 la limite de la suite de terme général

$$S_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k}{3k+1}$$

Q10 Donnez des commandes Maple permettant de calculer I_0 et S_n.

Tournez S.V.P.

Problème 2 (44$^{\text{ème}}$ Olympiade Mathématique Polonaise)

► Les relations $x_0 = 1992$ et $x_{n+1} = -\dfrac{1992}{n+1} \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} x_k$ définissent une suite de réels. Nous nous proposons de calculer $\displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant 1992} 2^k x_k$. Pour alléger les écritures, on note $p = 1992$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Écrivez une relation simple entre $(n+1)x_{n+1}$ et nx_n. En déduire l'expression de x_{n+1} en fonction de x_n.

$\boxed{\text{Q2}}$ Au moyen d'un télescopage, donnez une expression simple de x_n pour $n \in [\![0,p]\!]$; vous ferez intervenir le coefficient binomial $\binom{p}{n}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Concluez !

Problème 3 (Baltic Way 95 Mathematical Team Contest)

► Nous nous proposons d'établir la relation suivante :

$$\frac{1995}{2} - \frac{1994}{3} + \frac{1993}{4} - \cdots - \frac{2}{1995} + \frac{1}{1996} = \frac{1}{999} + \frac{3}{1000} + \cdots + \frac{1995}{1996}$$

On note $G(n) = \displaystyle\sum_{2 \leqslant k \leqslant 2n} \frac{(-1)^k(2n+1-k)}{k}$, $D(n) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{2k-1}{n+k}$ et $H_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Donnez une expression simple de $D(n)$, faisant intervenir H_n et H_{2n}.

$\boxed{\text{Q2}}$ Exprimez $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{2k-1}$ en fonction de H_n et H_{2n}.

$\boxed{\text{Q3}}$ En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant 2n} \frac{(-1)^k}{k}$ faisant intervenir H_n et H_{2n}.

$\boxed{\text{Q4}}$ Donnez alors une expression simple de $G(n)$, faisant intervenir H_n et H_{2n}.

$\boxed{\text{Q5}}$ Concluez !

$\boxed{\text{Q6}}$ Question subsidiaire. Petit rappel :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\Big(\frac{1}{n}\Big)$$

où γ désigne la constante d'Euler. Donnez un développement asymptotique de $D(n)$ lorsque n tend vers l'infini.