Exercice 1

▶ Pour $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$, nous noterons $S_p(n) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^p$. Rappel de quelques formules :

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Q1 Quelle est la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{S_2(n)}{n^3}$?

Q2 Quelle est la limite de la suite de terme général $v_n = \dfrac{S_3(n)}{n^4}$?

Q3 Justifiez *très simplement* l'encadrement $n^4 \leqslant S_4(n) \leqslant n^5$.

Q4 Calculez $S_4(n)$ pour $n \in [\![2,5]\!]$.

Q5 Rappelez le développement de $(a+b)^5$.

Q6 En utilisant le développement de $(k+1)^5$, ainsi qu'un télescopage adroit, donnez une expression simple de $S_4(n)$.

Q7 Vérifiez la validité de cette expression, pour $n \in [\![2,5]\!]$.

Q8 Explicitez $\lambda > 0$ et α tels que $\dfrac{S_4(n)}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda$.

▶ Nous nous proposons de généraliser ce dernier résultat.

Q9 Pour $k \geqslant 0$, justifiez l'encadrement suivant :

$$k^p \leqslant \int_k^{k+1} t^p \, dt \leqslant (k+1)^p$$

Q10 En déduire un encadrement de $S_p(n)$ par des intégrales, que vous calculerez.

Q11 Explicitez alors $\lambda(p) > 0$ et $\alpha(p)$ tels que $\dfrac{S_p(n)}{n^{\alpha(p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda(p)$.

Exercice 2

▶ Les questions sont indépendantes.

Q1 Simplifiez $\alpha = \sum_{1 \leqslant k \leqslant 5} \arctan(2k-1)$. Le résultat fera intervenir *un seul* arc tangente, ainsi que le nombre π, en cas de besoin.

Q2 Pour $x \in \mathbb{R}$, établissez :

$$2\arctan\Big(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\Big) = \arctan\Big(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\Big)$$

Q3 Résolvez (dans $\mathbb{R}$) l'équation :

$$\arcsin(x) - \arccos(x) = \frac{\pi}{6}$$

Tournez S.V.P.

Exercice 3

► Pour $x \in \left]-1,1\right]$, notons $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{t^{n+1}}{1+t}\,dt$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que, pour $x \in \left]-1,1\right]$ fixé, la suite de terme général $I_n(x)$ converge vers 0. Lors de la discussion, vous pourrez distinguer deux cas, en fonction du signe de x.

$\boxed{\text{Q2}}$ Justifiez, pour $t \neq -1$:

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} + \frac{(-1)^n t^{n+1}}{1+t}$$

$\boxed{\text{Q3}}$ En déduire, pour $x \in \left]-1,1\right]$:

$$\ln(1+x) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} - (-1)^n I_n(x)$$

$\boxed{\text{Q4}}$ De quelle suite *simple* $\ln(2)$ est-il la limite ? La convergence de cette suite est-elle suffisamment rapide, si l'on désire obtenir une approximation de $\ln(2)$?

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que l'on peut obtenir une approximation de $\ln 2$ en choisissant $x = -\frac{1}{2}$. Quelle valeur de n faut-il prendre pour obtenir une approximation de $\ln(2)$ à 10^{-3} près ?