Sup PCSI2 — Contrôle 1995/13

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (Bac C, Paris 1976)

► Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k > 0$, on note $\mathcal{C}_{\lambda,k}$ la courbe d'équation $(1+\lambda)x^2 + (1-\lambda)y^2 = k$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Q1 Étudiez rapidement les courbes $\mathcal{C}_{0,k}$, $\mathcal{C}_{1,k}$ et $\mathcal{C}_{-1,k}$.

Q2 Montrez que la conique d'équation $3x^2 + y^2 = 12$ fait partie de la famille des courbes $\mathcal{C}_{\lambda,k}$. Précisez tous ses paramètres géométriques, et dessinez cette conique.

Q3 Même question, avec la conique d'équation $3x^2 - y^2 = 6$.

Q4 Pour $k > 0$ fixé et $\lambda \notin \{-1; 0; 1\}$, précisez la nature de la courbe $\mathcal{C}_{\lambda,k}$ (ellipse ou hyperbole), son axe focal, et calculez le carré e^2 de son excentricité.

Exercice 2 (Sup de Co Paris, 1988)

► Nous étudions : $\in \mathbb{R}[X] \mapsto (X^2-1)'' + 4X'$. Nous noterons indifféremment ou (X).

Q1 Justifiez : est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q2 Soit $\in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Prouvez que $()$ est lui aussi de degré n. Notant a le coefficient dominant de , vous expliciterez le coefficient dominant de $()$ en fonction de a et de n.

Q3 Déterminez le noyau de .

Q4 Justifiez : induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, endomorphisme que nous noterons ${}_n$ dans la suite.

Q5 Explicitez la matrice ${}_3$ de ${}_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Q6 Notons ${}_n$ la matrice de ${}_n$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculez la trace de ${}_n$; rappel : la trace d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux.

► Soit $\in \mathbb{R}$. Nous nous intéressons à l'équation $() =$, équation que nous noterons $\mathcal{E}$ dans la suite.

Q7 Justifiez : l'ensemble des solutions de $\mathcal{E}$ est un s.e.v. de $\mathbb{R}[X]$.

Q8 Soit une solution non nulle de $\mathcal{E}$. Quelle relation a-t-on entre et le degré n de P ?

► Dans les trois questions suivantes, nous supposons que $\mathcal{E}$ possède une solution unitaire de degré n. Notons le polynôme $(-1)^n(-X)$.

Q9 Montrez que est aussi une solution de $\mathcal{E}$.

Q10 Que pouvez-vous dire du degré de $-$?

Q11 En déduire $=$; quelle est la parité de ?

► Pour $n \geqslant 0$ fixé, nous nous proposons de montrer que l'équation $\mathcal{E}$ possède *effectivement* une solution ${}_n$ unitaire de degré n.

Q12 Déterminez ${}_0$, ${}_1$ et ${}_2$.

Q13 Soit ${}_n$ répondant à la question. Justifiez l'existence d'une famille $(a)_{0\leqslant\leqslant n}$ vérifiant $a_0 = 1$ et ${}_n = \sum_{0\leqslant 2\leqslant n} a_X^{n-2}$.

Q14 Montrez que ${}_n$ est solution de $\mathcal{E}$ ssi on a, pour tout vérifiant $2 \leqslant 2 \leqslant n$:

$$2(2-2n-3)a_{=}(n-2+2)(n-2+1)a_{-1}$$

Q15 Justifiez alors l'existence de ${}_n$.

Q16 Donnez une expression simple de a, ne faisant intervenir aucun symbole $\prod$. Une écriture faisant intervenir *trois* coefficients binomiaux est possible, et sera appréciée comme il se doit.