Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

► Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \exp\bigl(-x^2\bigr)$.

Q1 Justifiez *rapidement* le fait que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Q2 Montrez que $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$, où P_n est une fonction polynôme de degré n, à coefficients appartenant tous à $\mathbb{Z}$. Précisez la parité de P_n, puis le coefficient dominant a_n de P_n.

Q3 f vérifie une équation différentielle du premier ordre *très simple* ; en appliquant la formule de Leibniz (que l'on rappellera), exprimez $P_{n+2}(x)$ en fonction de $P_{n+1}(x)$ et $P_n(x)$.

Q4 En déduire une relation *très simple* entre $P'_{n+1}(x)$ et $P_n(x)$.

Q5 Donnez une expression simple de $P_{2n}(0)$. Au fait, combien vaut $P_{2n+1}(0)$?

Q6 Soit $f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$, continue sur $[a, +\infty[$, dérivable dans $]a, +\infty[$. On suppose que $f(x)$ possède une limite, égale à $f(a)$, lorsque x tend vers $+\infty$. Démontrez le *théorème de Rolle généralisé* : il existe $c > a$ tel que $f'(c) = 0$.

Q7 Montrez que l'équation $P_n(x) = 0$ possède exactement n solutions réelles, que vous noterez $(x_{n,k})_{1 \leqslant k \leqslant n}$, et que ces solutions séparent celles de l'équation $P_{n+1}(x) = 0$.

Q8 Explicitez $P_2(x)$, $P_3(x)$ et $P_4(x)$: vous écrirez chacune de ces fonctions polynômes selon les puissances décroissantes de x. Résolvez ensuite chacune des équations $P_2(x) = 0$, $P_3(x) = 0$ et $P_4(x) = 0$. Vous ne laisserez ni radicaux aux dénominateurs des fractions, ni carrés parfaits à l'intérieur des radicaux.

Exercice 2

► Notons $f : t > 1 \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$.

Q1 Étudiez rapidement les variations de f, en précisant les limites aux bornes de son intervalle de définition.

► Pour $n \geqslant 3$, notons $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\,dt$. On rappelle que $e < 3$.

Q2 Prouvez que la suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est croissante.

Q3 La suite $(u_n)_{n \geqslant 3}$ est-elle *strictement* croissante ?

Q4 Donnez un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

Q5 Montrez que l'équation $f(x) = u_n$ possède, dans l'intervalle $[n, n+1]$, une et une seule solution, qui sera désormais notée x_n.

► Nous nous proposons d'étudier la suite $(x_n)_{n \geqslant 3}$.

Q6 Cette suite est-elle monotone ?

Q7 Cette suite converge-t-elle ?

Q8 Donnez un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers l'infini.