Sup PCSI2 — Contrôle 1995/03

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 (ESTP 1992 — Maths 2 — Question 5)

► Rappel : tout fonction f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ possède des primitives sur $[a, b]$; celles-ci sont des fonctions dérivables de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dont la dérivée est précisément f ; si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, ces primitives sont donc toutes croissantes. On note $x \in [a, b] \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ la primitive de f qui s'annule en a.

Q1 Montrer que les relations $f_0(x) = 1$ et $f_{n+1}(x) = 2\displaystyle\int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,dt$ définissent une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^+$.
Il est conseillé de lire avec la plus grande attention le texte de cette question, afin de bien comprendre ce qu'il faut prouver.

Q2 Expliciter $f_1(x)$ et $f_2(x)$.

Q3 Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n > 0$ et $b_n \geqslant 0$ tels que $f_n(x) = a_n x^{b_n}$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Q4 Donner une expression simple de b_n, débarrassée de tout symbole $\sum$. Quelle est la limite de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q5 On note $c_n = 2^n \ln a_n$. Exprimer c_{n+1} en fonction de c_n, en déduire :

$$\ln a_n = -2^{-n} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} 2^k \ln\bigl(1 - 2^{-k}\bigr)$$

Q6 Montrer que, pour tout $x \in \bigl[0, \frac{1}{2}\bigr]$, on a : $-x - x^2 \leqslant \ln(1 - x) \leqslant -x$.

Q7 En déduire un équivalent simple de $\ln a_n$ quand n tend vers l'infini, puis la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q8 Soit $x \in [0, 1]$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Q9 Écrire un programme Pascal qui calcule et affiche les valeurs de a_n et b_n, la valeur de n ayant été définie dans une constante. Le programme ne devra utiliser qu'une seule boucle `for`. Il est interdit d'utiliser `ln` et `exp` pour évaluer les puissances de 2.

Exercice 2 : quelques questions de bon sens

► On demande, pour chaque question, une réponse (OUI ou NON) justifiée en toute rigueur ; plus précisément, une réponse *affirmative* doit être appuyée par une démonstration, tandis qu'une réponse *négative* sera étayée par un contre-exemple.

Q1 Soient f et g deux applications bijectives de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Peut-on en déduire que $f + g$ est bijective ?

Q2 Même question, en remplaçant « bijective » par « strictement monotone ».

Q3 Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifient $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{2}{n}$. Est-il possible d'en déduire que $u_n + v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{3}{n}$?

Q4 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs vérifie $u_n = o(n)$. Peut-on affirmer que $\ln(u_n) = o(\ln n)$?