Sup PCSI2 — Contrôle 1995/02

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1

▶ Pour $n \geqslant 3$, notons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - nx$. Vous pourrez utiliser la majoration $e < 3$; pour la question 13, l'emploi d'une calculatrice est autorisé.

Q1 Étudier rapidement les variations de f_n, et prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ possède exactement deux solutions ; nous noterons x_n la plus petite, y_n la plus grande.

Q2 Déterminez le signe de $f_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$ et celui de $f_n\Big(\dfrac{3}{n}\Big)$; en déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$.

Q3 Que pouvez-vous dire de la suite $(y_n)_{n\geqslant 3}$?

▶ Nous nous proposons de déterminer un développement asymptotique de x_n quand n tend vers l'infini.

Q4 Donnez un équivalent *simple* de x_n quand n tend vers l'infini.

Q5 Montrer que $x_n - \dfrac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

▶ Nous nous proposons maintenant de déterminer un développement asymptotique de y_n quand n tend vers l'infini.

Q6 Montrer que $y_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

Q7 Soient (u_n) et (v_n) deux suites de réels strictement positifs, toutes deux divergentes vers $+\infty$. Supposons $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$. Montrez que $\ln(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(v_n)$.

Q8 Montrez alors que $y_n - \ln(n) \underset{n\to\infty}{\sim} \ln\big(\ln(n)\big)$.

Q9 Montrez enfin que :

$$y_n = \ln(n) + \ln\big(\ln(n)\big) + \frac{\ln\big(\ln(n)\big)}{\ln n} + o\Big(\frac{\ln\big(\ln(n)\big)}{\ln(n)}\Big)$$

▶ Nous allons maintenant évaluer numériquement x_3, qui sera noté α dans la suite, pour simplifier les écritures.

Q10 Soit $g : x \in [0,1] \mapsto \dfrac{e^x}{3}$. Montrez que $g\big([0,1]\big) \subset [0,1]$.

Q11 Montrez que α est l'unique point fixe de g, c'est-à-dire : la solution de l'équation $g(x) = x$.

Q12 Montrez que les relations $z_0 = \dfrac{1}{2}$ et $z_{n+1} = g(z_n)$ permettent de définir une suite de réels, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|z_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{e}{3}\Big)^n$. Quelle est la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q13 Déterminez le plus petit indice n pour lequel on a certainement, compte tenu de ce qui précède, la majoration $|z_n - \alpha| \leqslant 10^{-6}$.

Q14 Écrire un programme Pascal qui évalue α à 10^{-6} près, et affiche le résultat obtenu. Remarque : il n'y a aucune raison pour que ce programme nécessite plus de huit lignes. On ne demande pas de justification.

Q15 Si vous disposez d'une calculatrice programmable, et que vous savez vous en servir, transcrivez le programme précédent dans son langage, exécutez-le et indiquez l'approximation de α que vous obtenez.

Tournez S.V.P.

Exercice 2

▶ Quelques rappels : pour $0 \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{n-p}$; pour $0 < p \leqslant n$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$; pour $0 < p < n$, $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$. Toute autre formule devra être justifiée.

Q1 Pour p et q dans $\mathbb{N}$, établissez la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$.

Q2 Une urne contient $n+1$ jetons numérotés de 1 à $n+1$. Soient $p \in [\![0,n]\!]$ et $k \in [\![p,n]\!]$. De combien de façons peut-on choisir dans cette urne $p+1$ jetons, si l'on exige que le plus grand numéro choisi soit égal à $k+1$? Retrouvez ainsi le résultat précédent.

▶ Un article intitulé « Note on internal merging », paru dans *Software – Practice and Experience* **2** (1972), se termine par :

> « It can be shown that the expected number of saved transfers… is given by the expression
>
> $$T = \sum_{r=0}^{n} r \frac{{}_{m-r-1}\mathrm{C}_{m-n-1}}{{}_{m}\mathrm{C}_{n}}$$
>
> […] ${}_{m}\mathrm{C}_{n}$ is the symbol for the number of combinations of m objects taken n at a time[…] The author is grateful to the referee for reducing a more complex equation for expected transfers saved to the form given here. »

Q3 Traduisez le texte précédent, y compris les coefficients binomiaux. *Cette question est facultative pour celles et ceux qui n'ont jamais étudié l'anglais.*

Q4 En écrivant $k = m - (m-k)$, établissez la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{m-k-1}{m-n-1} = mA - (m-n)B$, où $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{m-k-1}{m-n-1}$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{m-k}{m-n}$.

Q5 En utilisant le résultat de Q1, simplifiez B, puis A.

Q6 Donnez alors une expression *très simple* de T.

Q7 Quelles réflexions vous inspire cet exercice ?