Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

## Exercice 1

► On pose $f(0) = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) = n + 1 - f\big(f(n)\big)$. On notera qu'il n'est pas évident que ces formules définissent une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Q1 Calculez $f(k)$ pour $k \in [\![1,9]\!]$ et vérifiez que $f(10) = 6$.

Q2 Soit $n \in \mathbb{N}$ ; on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion suivante :

« pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on peut calculer $f(k)$, et $f(k) \in [\![0,k]\!]$ »

Établissez par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Note : ceci montre que $f$ est bien une application de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Q3 Montrez que $0 \leqslant f(n+1) - f(n) \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q4 Montrez que $f(n+2) > f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q5 Déterminez le plus grand réel $\alpha$ tel que $\alpha n \leqslant f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de $f(n)$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

Q6 Déterminez le plus petit réel $\beta$ tel que $f(n) \leqslant \beta n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q7 On suppose que la suite de terme général $\dfrac{f(n)}{n}$, définie pour $n \geqslant 1$, possède une limite $\lambda$ lorsque $n$ tend vers l'infini. Quelle est nécessairement la valeur de $\lambda$ ?

Q8 En utilisant au besoin la même hypothèse qu'à la question précédente, déterminez la limite de la suite de terme général $\dfrac{f(n+1)}{f(n)}$ lorsque $n$ tend vers l'infini.

Q9 Montrez qu'il existe une infinité d'indices $n$ tels que $f(n+1) > f(n)$, et une infinité d'indices $n$ tels que $f(n+1) = f(n)$.

## Exercice 2

Q1 Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifiez $S(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^{n-k}$.

Q2 Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifiez $T(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} k2^{n-k}$.

## Exercice 3

Q1 Dans le numéro du journal Le Monde en date du Mercredi 30 août, on relève dans un même article les deux affirmations suivantes :

- *la proportion de polytechniciens qui ont une mère enseignante atteint le tiers de l'effectif*
- *les fils ou filles de profs ont cinquante fois plus de chances d'être à l'X que les autres*

On admet que la première assertion est exacte ; discutez la deuxième assertion en dix à vingt lignes au maximum.