m m

HX4 — Contrôle 1994/22

Partie I : un soupçon d'algèbre linéaire...

► On note **E** le $\mathbb{R}$-e.v. des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$; l'application nulle est notée $\mathbf{0}$. On note **F** l'ensemble des éléments f de **E** qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} f(2n) = f(n) \\ f(2n+1) = f(n) + f(n+1) \end{cases}$$

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $f \in \mathbf{F}$; combien vaut $f(0)$?

$\boxed{\text{Q2}}$ Prouver que **F** est un s.e.v. de **E**.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrer qu'il existe *un et un seul* élément de **F**, élément que l'on notera φ dans toute la suite du problème, et qui vérifie $\varphi(1) = 1$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Calculer $\varphi(k)$ pour tout $k \in [\![2, 10]\!]$; le détail des calculs devra figurer sur la copie.

$\boxed{\text{Q5}}$ Quelle est la dimension de **F** ?

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour $k \in \mathbb{N}$, donner une expression simple de $a_k = \varphi(2^k)$, $b_k = \varphi(2^k + 1)$ et $c_k = \varphi(2^k - 1)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Prouver que $\varphi(n)$ est pair si et seulement si n est multiple de 3.

Partie II : un zeste d'analyse, pour changer ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrer que $\varphi(n) \leqslant 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ En déduire que la suite de terme général $S_n(x) = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \varphi(k) x^k$ converge pour tout réel $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, vers un réel que l'on notera $\ell(x)$ dans la suite.

$\boxed{\text{Q10}}$ Prouver que ℓ est une application strictement croissante de $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, établir : $x\ell(x) = (x^2 + x + 1)\ell(x^2)$. Indication : manipuler la quantité $xS_{2n+1}(x)$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Prouver que la suite de terme général $S_n(x)$ converge pour tout réel $x \in [0, 1[$; on notera encore $\ell(x)$ la limite de cette suite.

$\boxed{\text{Q13}}$ Quelle est la limite de $\ell(x)$ lorsque $x \to 1^-$?

Partie III : récurrence un jour, récurrence toujours

► On se propose d'améliorer la majoration établie en Q8. On note $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci, définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q14}}$ Montrer que $\varphi(k) \leqslant F_{n+2}$ pour tout $k \in [\![2^n, 2^{n+1} - 1]\!]$.

$\boxed{\text{Q15}}$ On définit une suite de réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + (-1)^n$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donner une expression *simple* de u_n ; à titre indicatif, l'écriture minimale ne requiert pas plus de douze signes typographiques.

$\boxed{\text{Q16}}$ Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $2^n \leqslant u_n < 2^{n+1}$.

$\boxed{\text{Q17}}$ En raisonnant par récurrence, et en distinguant au besoin deux cas de figure selon la parité de n, établir :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \varphi(u_n) = F_{n+2}$$

Partie IV : une larme de programmation. . .

Q18 Écrire une procédure Pascal d'en-tête :

```
function phi(n:integer):integer;
```

qui, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, calcule $\varphi(n)$. On ne tiendra pas compte des problèmes de débordement dans les calculs, en convenant par exemple que le type `integer` peut représenter n'importe quel élément de $\mathbb{N}$.

► On considère le programme suivant :

```
1  var n,k,a,b:integer;
2  begin
3     repeat
4        readln(n)       (* lecture d'un naturel *)
5     until n>=0;
6     k:=n; a:=1; b:=0;
7     while k<>0 do
8     if odd(k) then     (* rappel : "odd" = "impair" *)
9     begin
10       b:=b+a;
11       k:=(k-1) div 2
12    end else
13    begin
14       a:=a+b;
15       k:=k div 2
16    end;
17    writeln(b)
18 end.
```

Q19 Prouver que ce programme affiche un résultat au bout d'un temps fini, autrement dit : on finit par sortir de la boucle `while` (à condition bien entendu que l'utilisateur consente à introduire au clavier un naturel, pour que l'on sorte de la boucle `repeat`).

Q20 On note a, b, k les valeurs respectives des variables `a`, `b` et `k`. Montrer que la quantité

$$a\varphi(k) + b\varphi(k+1)$$

reste constante au cours de l'exécution des lignes 7 à 17 du programme.

Q21 Finalement, que calcule ce programme ?

Partie V : vous prendrez bien une tranche de topologie au dessert !

Q22 Soit $f \in \mathbf{E}$, différente de $\mathbf{0}$. Justifier l'existence de $\nu(f) = \min\big\{n \in \mathbb{N} : \ f(n) \neq 0\big\}$.

► Soient f et g deux éléments de $\mathbf{E}$. On pose $\delta(f,g) = 2^{-\nu(f-g)}$ si $f \neq g$, et $\delta(f,g) = 0$ si $f = g$. Il est clair que $\delta(f,g) \geqslant 0$, et que $\delta(f,g)$ est nul ssi $f = g$. On dira que $\delta(f,g)$ est la *distance* de f et g.

Q23 Soient f, g et h trois éléments de $\mathbf{E}$. Établir l'inégalité :

$$\delta(f,h) \leqslant \max\big(\delta(f,g), \delta(g,h)\big)$$

Interprétation géométrique ?

Q24 L'application $N : \ f \in \mathbf{E} \mapsto \delta(f, \mathbf{0})$ est-elle une norme, sur le $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbf{E}$?

► Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{E}$; on dira que cette suite converge vers un élément g de $\mathbf{E}$ si

$$\delta(f_p, g) \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

Q25 Montrer que, si $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers g, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\big(f_p(n)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est stationnaire, autrement dit : il existe un rang p_0 (qui dépend de n) tel que : $p \geqslant p_0 \Rightarrow f_p(n) = g(n)$.

► À tout élément f de $\mathbf{E}$, on associe $U(f) \in \mathbf{E}$, défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} \big(U(f)\big)(2n) = f(n) \\ \big(U(f)\big)(2n+1) = f(n) + f(n+1) \end{cases}$$

Attention : notez bien l'emplacement et le rôle des parenthèses dans l'expression $\big(U(f)\big)(k)$; tout abus sur ce point sera sanctionné *très* violemment.

$\boxed{\text{Q26}}$ Montrer que U est un endomorphisme injectif mais non surjectif de $\mathbf{E}$.

$\boxed{\text{Q27}}$ Montrer que $1 \in \operatorname{Spec}(U)$; quel est le sous-espace propre associé ?

$\boxed{\text{Q28}}$ Montrer que U est 1-lipschitzien, autrement dit : quels que soient les éléments f et g de $\mathbf{E}$, on a :

$$\delta\big(U(f), U(g)\big) \leqslant \delta(f, g)$$

$\boxed{\text{Q29}}$ 1 est-elle la meilleure constante de Lipschitz pour U ?

$\boxed{\text{Q30}}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U^n le n-ième itéré de U. Soit $f \in \mathbf{E}$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall k \in [\![0, 2^n]\!] : \big(U^n(f)\big)(k) = \varphi(k)$$

Que peut-on en déduire concernant la suite $\big(U^n(f)\big)_{n \in \mathbb{N}}$?

$\boxed{\text{Q31}}$ Soit maintenant $f \in \mathbf{E}$ quelconque. Que pensez-vous de la suite $\big(U^n(f)\big)_{n \in \mathbb{N}}$?