HX4 — Contrôle 1994/21

▶ On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout élément f de $\mathcal{C}$, et tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n(f) = \int_0^1 t^n f(t)\,dt$. On identifie tout polynôme P à coefficients réels, et la fonction polynôme $\widetilde{P}$ associée, que l'on notera donc P.

Partie 1 : étude de la suite $\big(I_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$

Q1 Prouver que la suite $\big(I_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Q2 Soit $\alpha \in]0,1[$; prouver que $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^\alpha t^n f(t)\,dt = 0$.

Q3 On suppose $f(1) = 0$; montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| n\int_\alpha^1 t^n f(t)\,dt \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Q4 En déduire, toujours sous l'hypothèse $f(1) = 0$, que : $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(t)\,dt = 0$.

Q5 On ne suppose plus $f(1) = 0$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^1 t^n f(t)\,dt$.

Q6 On rappelle que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$. Avec $f : t \in [0,1] \mapsto e^{-t}$, calculer $I_n(f)$, et donner un équivalent simple de $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ lorsque n tend vers l'infini.

Partie 2 : étude de la série de terme général $\big(I_n(f)\big)^2$

Q7 Établir la convergence de la série de terme général $\big(I_n(f)bigr)^2$.

Q8 Soit P un polynôme à coefficients réels ; établir :

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx + i\int_0^\pi P\big(e^{i\theta}\big)e^{i\theta}\,d\theta = 0$$

Q9 Vérifier que $\Big|P\big(e^{i\theta}\big)\Big|^2 = P\big(e^{i\theta}\big)P\big(e^{-i\theta}\big)$. Établir alors :

$$\int_0^{+1} \big(P(x)\big)^2\,dx \leqslant \int_{-1}^{+1} \big(P(x)\big)^2\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} \Big|P\big(e^{i\theta}\big)\Big|^2\,d\theta$$

Q10 En déduire que, pour toute famille $(a_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels :

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n} \frac{a_k a_\ell}{k+\ell+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} {a_k}^2$$

Q11 En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f et à $g : t \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} I_k(f)t^k$, établir :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big[I_n(f)\big]^2 \leqslant \pi \int_0^1 \big|f(t)\big|^2\,dt$$

Partie 3 : étude de la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$

Q12 *Dans cette question seulement*, on suppose $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Établir la convergence de la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$. *Indication* : notant $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k I_k(f)$, on prouvera que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Q13 On suppose f *quelconque* dans $\mathcal{C}$. En utilisant $\dfrac{1}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k t^k + (-1)^{n+1}\dfrac{t^{n+1}}{1+t}$, établir la convergence de la série de terme général $(-1)^n I_n(f)$, et prouver que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1+t}dt$.

Q14 Avec $f : t \mapsto 1$, donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

Q15 Avec $f : t \mapsto \sqrt{t}$, donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

Partie 4 : étude de la série de terme général $I_n(f)$

▶ Dans les trois questions suivantes, g est une application continue de $[0,1[$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\int_0^1 g(t)\,dt$ soit absolument convergente, autrement dit : $\int_0^1 \big|g(t)\big|\,dt$ converge ; dans ce cas, on sait que l'intégrale $\int_0^1 g(t)\,dt$ est elle aussi convergente.

Q16 Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\int_0^1 t^n g(t)\,dt$ est, elle aussi, absolument convergente. On la notera désormais $I_n(g)$.

Q17 Soit $\varepsilon > 0$; prouver qu'il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big|\int_\alpha^1 t^n g(t)\,dt\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

Q18 En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(g) = 0$.

Q19 Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt$ soit absolument convergente. Prouver que la série de terme général $I_n(f)$ converge, et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt$.

Q20 Soit $f \in \mathcal{C}$ telle que $f(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Montrer que, si la série de terme général $I_n(f)$ converge, alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt$ converge également, et l'on a $\int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}dt = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} I_n(f)$.

Partie 5 : étude dans $\mathbb{R}_n[X]$

▶ On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$-e.v. des polynômes à coefficients réels de degré n au plus.

Q21 Montrer que l'on définit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un produit scalaire en posant $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

Q22 Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $I_k : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto I_k(P)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Q23 Prouver que la famille $\mathcal{B} = (I_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base du dual de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q24 On note $\mathcal{B}_0$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$: $\mathcal{B}_0 = (e_k^*)_{0\leqslant k\leqslant n}$, où e_k est le polynôme X^k. Écrire la matrice A de passage de la base $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$.

Q25 Soit $h : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto h(P)$, où $h(P)$ est défini par $\big(h(P)\big)(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} I_k(P)t^k$. Montrer que h est un automorphisme de $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{R}_n[X]$; écrire sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q26 Pour P et Q éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer $\big(P|h(Q)\big)$.

Q27 Prouver que, si h possède des valeurs propres, celles-ci sont strictement positives. *Remarque* : on peut démontrer que h possède effectivement $n+1$ valeurs propres, distinctes ou non, comptées chacune avec son ordre de multiplicité, mais ceci n'est pas demandé.