Quelques rappels

- Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction f de J dans $\mathbb{R}$ est *convexe* si :
$$f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
et ce quels que soient x et y appartenant à J et λ appartenant à $[0,1]$.
- Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, est bornée et atteint ses bornes.

Notations et définitions

- Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ d'amplitude non nulle. Une fonction f de J dans $\mathbb{R}$ est *fortement convexe* s'il existe un réel $\alpha>0$ tel que :
$$f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\alpha\lambda(1-\lambda)(x-y)^2$$
et ce quels que soient x et y appartenant à J et λ appartenant à $[0,1]$. Nous dirons alors que α est un *paramètre de forte convexité* de f. Vous pourrez utiliser l'abréviation *p.f.c.* dans la rédaction.
- $x\in J$ est un *point optimal* de f sur J si $f(x)\leqslant f(y)$ pour tout $y\in J$. Autrement dit, f passe par un minimum absolu en x.

Quelques propriétés de la forte convexité

Q1 Prouvez que, si $f:\ J\mapsto\mathbb{R}$ est fortement convexe sur J, alors elle est convexe sur J.

Q2 Prouvez que la fonction exponentielle $x\in\mathbb{R}\mapsto e^x$ n'est pas fortement convexe.

Q3 Prouvez que l'ensemble des paramètres de forte convexité de f est un intervalle de la forme $]0,\alpha_{max}]$.

Q4 Prouvez que $f:\ x\in\mathbb{R}\mapsto x^2$ est fortement convexe. Précisez la valeur de α_{max} dans ce cas.

Q5 Prouvez que, si f est une fonction continue d'un intervalle J fermé et borné dans $\mathbb{R}$, alors elle possède au moins un point optimal.

Q6 Construisez un couple (J,f) où J est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue de J dans $\mathbb{R}$, possédant une infinité de points optimaux, et qui ne soit constante sur aucun sous-intervalle de J d'amplitude non nulle.

Q7 Exhibez une fonction $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ bornée, non constante, et ne possédant pas de point optimal.

Q8 Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}+\infty$ et $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$. Prouvez que f possède au moins un point optimal.

Q9 Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction convexe de J dans $\mathbb{R}$. Soit x un point de J. Supposons que f possède en x un minimum local, c'est-à-dire : il existe $x\in J$ et $\eta>0$ tels que $f(x)\leqslant f(y)$ pour tout $y\in J\cap]x-\eta,x+\eta[$. Prouvez que x est un point optimal de f.

Q10 Supposons toujours que f est une fonction convexe d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que l'ensemble des points optimaux de f est, soit vide, soit un intervalle contenu dans J.

Tournez S.V.P.

Existence et unicité du point optimal pour une fonction fortement convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

► Dans cette partie, f désigne une fonction fortement convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; nous allons établir qu'elle possède un et un seul point optimal.

Q11 Supposant que f possède au moins un point optimal, établissez l'unicité de celui-ci.

Q12 Établissez, pour $n \in \mathbb{Z} : f(n) \leqslant \dfrac{f(n-1)+f(n+1)}{2} - \alpha$.

Q13 En déduire que $f(n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Montrez de même que $f(-n) \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Q14 Concluez, en utilisant par exemple Q5 et Q9.

Q15 Exhibez une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convexe, mais ne possédant pas de point optimal.

Approximation du point optimal

► Dans cette partie, nous supposons que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est fortement convexe. Nous supposons également que f' est M-lipschitzienne, avec $M > 0$. Notons x^* le point optimal de f ; l'existence de x^* résulte de la partie précédente.

Q16 Montrez que M majore (au sens large) tout paramètre de forte convexité de f.

Q17 Améliorez le résultat précédent en montrant que $\dfrac{M}{2}$ majore (au sens large) tout paramètre de forte convexité de f. Est-il possible de faire encore mieux ?

► Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Fixons un réel x_0, et définissons les autres termes d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation : $x_{n+1} = x_n - \lambda_n f'(x_n)$. α désigne un paramètre de forte convexité de f.

Q18 Prouvez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left(x_{n+1} - x^*\right)^2 \leqslant \left(M^2{\lambda_n}^2 - 2\alpha\lambda_n + 1\right)\left(x_n - x^*\right)^2$$

Q19 Soit $F : t \in \mathbb{R}^+ \mapsto F(t) = (Mt)^2 - 2\alpha t + 1$. Déterminez a et b (avec $0 \leqslant a < b$) tels que $F(t) \leqslant 1$ ssi $t \in [a,b]$.

Q20 Soient a' et b' tels que $a < a' < b' < b$. Supposons que les λ_n sont tous dans $[a',b']$. Prouvez l'existence de $\beta \in [0,1[$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left|x_{n+1} - x^*\right| \leqslant \beta\left|x_n - x^*\right|$$

En déduire, dans ce cas, le comportement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q21 Prouvez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leqslant f(x_n) - f(x^*) \leqslant M\left|x_n - x^*\right|^2$$

et concluez.