Exercice 1

► Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. On rappelle qu'un *projecteur* de E est un endomorphisme p de E vérifiant $p \circ p = p$. On sait que, si p est un projecteur de E, alors $E = (\ker p) \oplus (\operatorname{im} p)$, et $\operatorname{im} p$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont invariants sous l'action de p.

Q1 Soit p un projecteur de E. Montrez que $\ker p = \operatorname{im}(Id_E - p)$, puis que $\operatorname{im} p = \ker(Id_E - p)$.

► Dans la suite, p et q sont deux projecteurs de E. Id_E désigne l'endomorphisme identique de E, et $\mathbf{0}$ l'endomorphisme nul.

Q2 On suppose $(Id_E - p) \circ q = q \circ (Id_E - p) = \mathbf{0}$. Montrez que $p - q$ est un projecteur.

Q3 Réciproquement, montrez que si $p - q$ est un projecteur, alors $(Id_E - p) \circ q = q \circ (Id_E - p) = \mathbf{0}$.

Q4 En déduire que $p - q$ est un projecteur ssi on a simultanément $\operatorname{im} q \subset \operatorname{im} p$ et $\ker p \subset \ker q$.

► Dans les trois questions suivantes, on suppose que $p - q$ est un projecteur.

Q5 Montrez que $\operatorname{im}(p - q) = (\operatorname{im} p) \cap (\ker q)$.

Q6 Montrez que $\ker p$ et $\operatorname{im} q$ sont en somme directe.

Q7 Montrez que $\ker(p - q) = (\ker p) \oplus (\operatorname{im} q)$.

Exercice 2

► Rappel : $\mathbb{R}_+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$. Nous notons $\mathcal{E}$ l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, muni de sa structure naturelle de $\mathbb{R}$-e.v.

Q1 Soit $f \in \mathcal{E}$. Justifiez **rigoureusement** l'existence de la fonction

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^x e^{-t} f(t)\, dt$$

ainsi que son appartenance à $\mathcal{E}$. Désormais, cette fonction sera notée $\Phi(f)$. Nous définissons ainsi une fonction Φ de $\mathcal{E}$ dans lui-même.

Q2 Soient $f \in \mathcal{E}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Que pensez-vous des notations $\big(\Phi(f)\big)(x)$, $\Phi(f)(x)$ et $\Phi\big(f(x)\big)$?

Q3 Prouvez que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

Q4 Soient $f \in \mathcal{E}$ et $F = \Phi(f)$. Combien vaut $F(0)$? Φ est-il surjectif ?

Q5 Φ est-il injectif ?

Q6 Soit $F \in \mathcal{E}$ vérifiant $F(0) = 0$. Montrez qu'il existe un et un seul élément f de $\mathcal{E}$ tel que $\Phi(f) = F$. Vous expliciterez f en fonction de F.

► Rappel : une fonction f, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, est dite *bornée* s'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\big|f(x)\big| \leqslant M$ pour tout $x \in I$. Notez bien que M dépend de f.

► Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ qui sont bornés.

Q7 Montrez que $\mathcal{B}$ est stable par Φ.

Q8 Donnez un autre exemple **intéressant** de s.e.v. de $\mathcal{E}$ stable par Φ. Bien entendu, vous donnerez une preuve à l'appui de votre exemple !