HX4 — Contrôle 1994/14

▶ On étudie certaines propriétés de l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t^2}$; on donne un sens à l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$, et on calcule une valeur approchée de cette intégrale.

Partie I : dérivées successives de φ

▶ Cette première partie est fortement indépendante des quatre autres. Nous nous proposons d'étudier les propriétés d'une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes, associées aux dérivées successives de φ.

Q1 Prouvez que, pour tout naturel n, $\varphi^{(n)}$ est le produit de φ par une fonction polynôme P_n de degré n ; vous écrirez une relation entre P_{n+1}, P_n et P_n'. Précisez la parité et le coefficient dominant de P_n.

Q2 Explicitez P_n pour $n \in [\![1, 5]\!]$.

Q3 À partir d'une relation *très simple* entre $\varphi(x)$ et $\varphi'(x)$, établissez une relation entre les applications P_n, P_{n+1} et P_{n+2}. *Indication* : utilisez la formule de Leibniz.

Q4 Prouvez que $P_{n+1}' = -2(n+1)P_n$. En déduire que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre.

Q5 Calculez $P_{2n}(0)$; vous exprimerez le résultat au moyen de factorielles et/ou de coefficients binomiaux, mais sans aucun symboles $\prod$.

▶ On rappelle l'énoncé du théorème de Rolle généralisé : soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : [\alpha, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$; on suppose que f est continue sur $[\alpha, +\infty[$, dérivable dans $]\alpha, +\infty[$, et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(\alpha)$; alors il existe $c \in]\alpha, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Q6 Prouvez que P_n possède exactement n racines réelles, et que celles-ci séparent les racines de P_{n+1}.

Partie II : une méthode d'intégration numérique

▶ Soit a et b deux réels distincts, avec $a < b$. Soit $f \in \mathcal{C}^4\big([a, b], \mathbb{R}\big)$. On définit $K \in \mathbb{R}$ et $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ par les relations :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \frac{b-a}{2}\big(f(b)+f(a)\big) - \frac{(b-a)^2}{12}\big(f'(b)-f'(a)\big) + K\frac{(b-a)^5}{720}$$

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \frac{x-a}{2}\big(f(x)+f(a)\big) + \frac{(x-a)^2}{12}\big(f'(x)-f'(a)\big) - K\frac{(x-a)^5}{720}$$

Q7 Justifiez rigoureusement l'appartenance de g à $\mathcal{C}^3\big([a, b], \mathbb{R}\big)$.

Q8 En appliquant répétitivement le théorème de Rolle, établir l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $K = f^{(4)}(c)$.

Q9 On fixe un naturel n non nul ; on pose $h = \dfrac{b-a}{n}$, et $x_i = a + ih$ pour $i \in [\![0,n]\!]$. On note $M_4 = \sup\limits_{a\leqslant t\leqslant b} \big|f^{(4)}(t)\big|$. Prouvez que :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt - \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\Big) + \frac{h^2}{12}\big(f'(b)-f'(a)\big)\right| \leqslant \frac{nh^5 M_4}{720}$$

Indication : utiliser Q8 pour établir une majoration sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$; exploitez ensuite des relations de Chasles, et l'inégalité triangulaire.

Tournez S.V.P.

Partie III : l'intégrale de Gauss

Q10 On suppose $a > 0$ et $X \geqslant a$. Établissez :

$$\int_a^X e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-a^2}}{2a} - \frac{e^{-X^2}}{2X} - \frac{1}{2}\int_a^X \frac{e^{-t^2}}{t^2}\,dt$$

En déduire que $\displaystyle\int_a^X e^{-t^2}\,dt$ possède une limite lorsque X tend vers $+\infty$. Désormais, cette limite sera notée $I(a)$. Prouvez que $I(a) \leqslant \dfrac{e^{-a^2}}{2a}$, et justifiez la majoration $\big|I(3)\big| \leqslant 3 \cdot 10^{-5}$.

Q11 Prouvez que $\displaystyle\int_0^X e^{-t^2}\,dt$ possède une limite lorsque X tend vers $+\infty$. Désormais, cette limite sera notée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Partie IV : évaluation de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$

Q12 Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvez que, pour $0 \leqslant u \leqslant 1$, on a :

$$\left|e^{-u} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k u^k}{k!}\right| \leqslant \frac{u^n}{n!}$$

Indication : vous procèderez par récurrence, en intégrant un encadrement supposé vrai au rang n.

Q13 On pose :

$$A_n = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)\cdot k!}$$

Déterminez le plus petit naturel n tel que $|A_n| < 15 \cdot 10^{-6}$. En déduire une valeur approchée de $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ à $2 \cdot 10^{-5}$ près.

Partie V : évaluation de $\displaystyle\int_1^3 e^{-t^2}\,dt$

Q14 Explicitez $\varphi^{(4)}$ et $\varphi^{(5)}$. Étudiez les variations de $\varphi^{(4)}$ sur l'intervalle $[1,3]$ et donnez un majorant $\widetilde{M_4}$ de $M_4 = \sup\limits_{1\leqslant t\leqslant 3} \big|\varphi^{(4)}(t)\big|$.

Q15 Déterminez le plus petit naturel n non nul tel que $\dfrac{2^5 \widetilde{M_4}}{720 n^4} < 4 \cdot 10^{-5}$.

Q16 Déduisez de la deuxième partie une valeur approchée à $5 \cdot 10^{-5}$ près de $\displaystyle\int_1^3 e^{-t^2}\,dt$.

Q17 On admet la formule : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt + \int_1^3 e^{-t^2}\,dt + I(3)$. Déduisez de l'ensemble de l'étude une valeur approchée à 10^{-4} près de l'intégrale de Gauss. Discutez la qualité de l'estimation obtenue, sachant que la valeur exacte est $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.