$\boxed{\text{HX4 — Contrôle 1994/10}}$

Définitions et notations

- E est un ensemble non vide, muni d'une loi de composition $*$, vérifiant les propriétés suivantes :
  - (A1) $*$ est associative
  - (A2) tout élément de E est régulier pour $*$
  - (A3) $*$ possède un élément neutre noté e
  - (A4) le seul élément de E inversible pour $*$ est e
- Pour $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}$, on note x^n le n-ième itéré de x pour la loi $*$, défini par $x^0 = e$ et $x^{n+1} = x * x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a alors : $x^{n+1} = x^n * x$, $x^{p+q} = x^p * x^q$ et $\left(x^p\right)^q = x^{pq}$ pour tous naturels n, p et q.
- On notera bien que (sauf dans une question explicitement signalée) la loi $*$ n'est pas supposée commutative. Pour alléger, on écrira xy au lieu de $x * y$.

Clôture d'une partie de E

- Une partie A de E est *stable* pour la loi $*$ si : $\forall (x, y) \in A^2 :\ xy \in A$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $\left(A_i\right)_{i\in I}$ une famille quelconque de parties de E, toutes stables pour $*$. Prouver que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i$ est une partie stable de E.

- Soit A une partie de E. On appelle *clôture* de A l'intersection de toutes les parties de E stables et contenant A. On la note $\overline{A}$

$\boxed{\text{Q2}}$ Justifier cette définition.

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouver que $\overline{A}$ est la plus petite partie de E (au sens de l'inclusion) stable et contenant A.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrer que $A \mapsto \overline{A}$ est croissante pour l'inclusion.

$\boxed{\text{Q5}}$ Soit $x \in E$. Déterminer $\overline{\{x\}}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Déterminer $\overline{E}$, $\overline{\{e\}}$, et $\overline{\emptyset}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Établir $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.

Un ordre sur E

- On définit sur E une relation notée $\preceq$ par :

$$x \preceq y \iff \exists u \in E :\ y = xu$$

Lorsque $x \preceq y$, on dit que x *précède* y.

$\boxed{\text{Q8}}$ Prouver que $\preceq$ est une relation d'ordre sur E. Quel est le plus petit élément de E ?

$\boxed{\text{Q9}}$ Examiner la compatibilité de $\preceq$ avec la loi $*$, *id est* : si $x \preceq y$, a-t-on $xz \preceq yz$ et $zx \preceq zy$?

$\boxed{\text{Q10}}$ Prouver que, si E n'est pas réduit à $\{e\}$, alors E n'a pas de plus grand élément.

$\boxed{\text{Q11}}$ Affiner le résultat précédent : supposant toujours E non réduit à $\{e\}$, construire une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, strictement croissante pour la relation $\preceq$; une telle suite doit donc vérifier $u_n \preceq u_{n+1}$ et $u_n \neq u_{n+1}$ pour tout naturel n.

Factorisation dans E

- Un élément x de E est *réductible* s'il existe des éléments u et v de E tous deux distincts de e, et tels que $x = uv$; on dira que u et v sont des *facteurs* de x. Un élément de E qui n'est pas réductible est *irréductible*.

$\boxed{\text{Q12}}$ Traduire la réductibilité et l'irréductibilité en termes de $\preceq$.

- Une *factorisation* d'un élément $x \neq e$ de E est une suite finie $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ d'éléments de E, tous irréductibles et distincts de e, telle que $x = u_1 u_2 \ldots u_n$. On dit que x est *factorisable* s'il possède au moins une factorisation. n est la *longueur* de cette factorisation.

$\boxed{\text{Q13}}$ Prouver que l'ensemble des éléments factorisables de E est une partie stable de E.

$\boxed{\text{Q14}}$ *Pour cette question uniquement*, on suppose que la loi $*$ est commutative. Prouver que, si E contient un élément non factorisable, alors on peut construire une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, strictement décroissante pour la relation $\preceq$. Une telle suite doit donc vérifier $v_{n+1} \preceq v_n$ et $v_{n+1} \neq v_n$ pour tout naturel n.

Degré des éléments factorisables de E

$\boxed{\text{Q15}}$ Soit x un élément factorisable de E. Montrer que l'ensemble des longueurs des factorisations de x possède un plus petit élément.

► On appelle *degré* d'un élément factorisable x de E la longueur minimale d'une factorisation de x ; on le note $\deg(x)$. On remarquera que les éléments irréductibles de E sont les éléments factorisables de degré 1.

$\boxed{\text{Q16}}$ Soient x et y deux éléments factorisables de E. Quelle relation peut-on écrire entre $\deg(x)$, $\deg(y)$ et $\deg(xy)$?

Conjugaison dans E

► On suppose désormais que tout élément de E distinct de e possède *une et une seule* factorisation.

$\boxed{\text{Q17}}$ Quelle relation a-t-on cette fois entre $\deg(x)$, $\deg(y)$ et $\deg(xy)$?

$\boxed{\text{Q18}}$ Quelle valeur est-il raisonnable d'attribuer à $\deg(e)$?

$\boxed{\text{Q19}}$ On suppose que E contient au moins un élément factorisable. Que peut-on dire de l'ensemble des degrés des éléments factorisables de E ?

$\boxed{\text{Q20}}$ On suppose que E contient exactement un élément irréductible x ; combien contient-il d'éléments factorisables de degré n, pour $n \in \mathbb{N}^*$?

$\boxed{\text{Q21}}$ Soient s et t deux éléments de E. Établir l'équivalence des trois propositions suivantes :

(P1) il existe un élément u de E tel que $su = ut$
(P2) il existe un élément v de E tel que $vs = tv$
(P3) il existe des éléments x et y de E tel que $s = xy$ et $t = yx$

► On dira que deux éléments s et t de E sont *conjugués*, et on notera $x \sim y$, lorsqu'ils vérifient les propriétés (P1) à (P3). Il est clair que la conjugaison est une relation symétrique.

$\boxed{\text{Q22}}$ Prouver que la conjugaison est une relation d'équivalence. Préciser la classe de e.

$\boxed{\text{Q23}}$ Prouver que x et y commutent si et seulement si il existe $z \in E$ et $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x = z^p$ et $y = z^q$. Indication pour le sens direct : raisonner par récurrence sur $n = \max\big(\deg(x), \deg(y)\big)$.