HX4 — Contrôle 1994/09

Exercice 1

- Soit A un ensemble muni d'une loi de composition $\star$ associative, et pour laquelle A possède un neutre noté e. Notons G l'ensemble des éléments de A inversibles pour $\star$.

Q1 Montrez que G est stable pour la loi $\star$.

Q2 Montrez que G, muni de la loi induite par $\star$, est un groupe. Est-il nécessairement abélien ?

- Dans la suite, nous prenons $A = \mathbb{Z}/14\mathbb{Z}$, muni de la loi de multiplication.

Q3 Énumérez (justification à l'appui) les éléments inversibles de A ; leur ensemble sera noté G.

Q4 Dressez la table de multiplication de G.

Q5 Précisez l'ordre de chaque élément de G. G est-il cyclique ? Si oui, quels sont ses générateurs ? À quel(s) groupe(s) bien connu(s) $(G, \times)$ est-il isomorphe ?

- Désormais, G désigne un groupe abélien quelconque, dont la loi est notée multiplicativement. Un élément u de G est un *carré* s'il existe un élément v de G tel que $u = v^2$. Notons $\sqrt{G}$ l'ensemble des éléments de G qui sont des carrés.

Q6 Montrez que $\sqrt{G}$ est un sous-groupe de G

Q7 Soient $u \in G$ et q un naturel impair. Montrez que $u \in \sqrt{G}$ si et seulement si $u^q \in \sqrt{G}$.

Exercice 2

- Soit A est une partie de $\mathbb{R}$; notons χ_A sa fonction caractéristique, définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.
- On rappelle que, si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'amplitude non nulle, alors I contient au moins un rationnel et au moins un irrationnel.

Q1 Considérons la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - x + (2x - 1) \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Quelle est sa bijection réciproque ? Quels sont ses points fixes, c'est-à-dire les réels x tels que $f(x) = x$? Montrez que, si I est un intervalle d'amplitude non nulle, la restriction de f à I n'est, ni croissante, ni décroissante.

Q2 Construisez une fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ bijective, telle que : (i) la restriction de g à $\mathbb{R}_-$ soit strictement décroissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$; et (ii) la restriction de g à $\mathbb{R}_+^*$ soit strictement croissante et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Q3 Construisez une fonction $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ bijective, telle que : (i) $\varphi(x+1) = \varphi(x) + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; et (ii) la restriction de φ à $[n, n+1[$ soit strictement décroissante, quel que soit $n \in \mathbb{Z}$.