HX4 — Contrôle 191994/08

**Partie 1 : partie fractionnaire d'un réel**

► Définissons sur $\mathbb{R}$ une relation binaire notée $\approx$ par : $\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : x \approx y \iff x - y \in \mathbb{Z}$.

Q1 Prouvez que $\approx$ est une relation d'équivalence.

Q2 Prouvez que $\approx$ est compatible avec l'addition en ce sens que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : \forall z \in \mathbb{R} : x \approx y \Rightarrow x + z \approx y + z$$

Est-elle compatible avec la multiplication ?

Q3 Prouvez que chaque classe modulo $\approx$ contient un et un seul représentant dans l'intervalle [0,1[.

► Dans la suite, on note $d(x)$ le représentant de $x$ dans l'intervalle [0,1[.

Q4 Prouvez que $d$ est périodique ; que pensez-vous de $d \circ d$ ?

Q5 Quelle relation existe-t-il entre $x$, $d(x)$ et la partie entière $\lfloor x \rfloor$ de $x$ ?

Q6 Sur votre calculatrice, quelle touche permet de calculer $d(x)$ ?

Q7 A-t-on $d(x + y) = d(x) + d(y)$ quels que soient les réels $x$ et $y$ ?

Q8 Prouvez que $d\big(d(x) + y\big) = d(x + y)$ quels que soient les réels $x$ et $y$.

**Partie 2 : suites périodiques**

► Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *périodique* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n+p} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; on dit alors que $p$ est *une* période de cette suite. En particulier, dire qu'une suite est constante revient à dire qu'elle est périodique de période 1.

Q9 Montrez que l'on peut parler de *la plus petite période* d'une suite périodique.

Q10 Soit $p$ la plus petite période d'une suite périodique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que l'ensemble des périodes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des multiples de $p$ dans $\mathbb{N}^*$.

Q11 Montrez que la somme de deux suites périodiques est elle-même une suite périodique. Que pouvez-vous dire de sa plus petite période ?

Q12 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite périodique et $\lambda$ un réel. Montrez que la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également périodique ; quelle est sa plus petite période ?

Q13 Soit $(u_{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ périodique. La suite $(u_{s(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle périodique ?

**Partie 3 : suites de Christoffel**

► Dans toute la suite, $\alpha$ désigne un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$. Nous lui associons la suite de terme général $c_n(\alpha) = \lfloor (n + 1)\alpha \rfloor - \lfloor n\alpha \rfloor$.

Q14 Quelles sont les valeurs que peut prendre $c_n(\alpha)$ ?

Q15 Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ la suite $\big(c_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle constante ?

Q16 Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha$ la suite $\big(c_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle périodique, de plus petite période égale à 2 ?

► Considérons les deux assertions suivantes :

(i) il existe un naturel $p$ tel que $c_p(\alpha) = c_{p+1}(\alpha) = 0$
(ii) il existe un naturel $q$ tel que $c_q(\alpha) = c_{q+1}(\alpha) = 1$

Q17 Montrez que, si (i) est vraie, alors $\alpha < \dfrac{1}{2}$ ; et que, si (ii) est vraie, alors $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

Q18 Il résulte de la question précédente que (i) et (ii) ne peuvent être simultanément vraies. Montrez qu'elles sont simultanément fausses si et seulement si $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

► Notons $R_\alpha : x \in [0, 1[ \mapsto d(x + \alpha)$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Montrez que l'on peut parler du $n$-ième itéré $R_\alpha^n$ de $\alpha$, puis que $R_\alpha^n(0) = d(n\alpha)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q20}}$ Prouvez que $c_n(\alpha)$ est nul si et seulement si $R_\alpha^n(0) \in [0, 1-\alpha[$.

► Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. Notons $S_{n,r}(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=n}^{n+r-1} c_k(\alpha)$.

$\boxed{\text{Q21}}$ Simplifiez $S_{n,r}(\alpha)$.

$\boxed{\text{Q22}}$ Soit $n'$ un autre naturel. Prouvez l'inégalité $\left|S_{n,r}(\alpha) - S_{n',r}(\alpha)\right| \leqslant 1$.

**Partie 4 : suites de Christoffel périodiques**

► Dans les deux questions suivantes, nous supposons que $\alpha$ appartient à $]0,1[$ et est rationnel ; nous pouvons donc écrire $\alpha = \dfrac{p}{q}$, avec $p$ et $q$ naturels, premiers entre eux, et $0 < p < q$.

$\boxed{\text{Q23}}$ Prouvez que la suite $\big(c_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique, de période $q$.

$\boxed{\text{Q24}}$ Prouvez que $S_{0,q}(\alpha) = p$, et montrez que $q$ est la plus petite période de la suite $\big(c_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

► Nous nous proposons d'établir la réciproque : si la suite $\big(c_n(\alpha)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique, alors $\alpha$ est rationnel. Soit $q$ la plus petite période de la suite.

$\boxed{\text{Q25}}$ Montrez qu'il existe $p \in [\![0, q-1]\!]$ tel que $\dfrac{p}{q} \leqslant \alpha < \dfrac{p+1}{q}$.

$\boxed{\text{Q26}}$ Prouvez que $S_{nq,q}(\alpha)$ ne dépend pas de $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q27}}$ En déduire que $\lfloor nq\alpha \rfloor = np$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et conclure.