Exercice 1

► Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On note $f^{(0)} = Id_{\mathbb{R}}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}$. En particulier, $f^{(1)} = f$.

Q1 Prouvez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = f^{(n)} \circ f$.

► Nous supposons, dans la suite de cet exercice, que f vérifie $f^{(2)}(x) = 2f(x) - x$ pour tout réel x.

Q2 Exprimez $f^{(3)}(x)$ et $f^{(4)}(x)$ en fonction de x et de $f(x)$.

Q3 Établissez une formule générale exprimant $f^{(n)}(x)$ en fonction de n, x et $f(x)$.

Q4 Prouvez que f est injective.

Q5 f peut-elle être strictement décroissante ?

Exercice 2

► Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée. On rappelle que A possède une borne supérieure $M = \sup(A)$, qui est le plus petit majorant de A, et vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists x \in A : M - \varepsilon < x \leqslant M$$

Q1 Prouvez que $A' = \{e^x \mid x \in A\}$ possède une borne supérieure $M' = \sup(A')$, et que $M' = e^M$.

► Notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

Q2 Prouvez que $A'' = \{\lfloor x \rfloor \mid x \in A\}$ possède une borne supérieure $M'' = \sup(A'')$. A-t-on nécessairement $M'' = \lfloor M \rfloor$?

► Soit B une autre partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée. Notons $A + B = \{x + y \mid x \in A, y \in B\}$ l'ensemble des réels qui peuvent s'écrire comme somme d'un élément de A et d'un élément de B.

Q3 Prouvez que $A + B$ possède une borne supérieure ; comparez $\sup(A) + \sup(B)$ et $\sup(A + B)$.