HX4 — Contrôle 1994/04

Rappel : rédigez chaque partie ou exercice sur une (ou plusieurs) copie(s) séparée(s). Pas d'encre rouge. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Toutes les justifications doivent figurer sur votre copie, mais la rédaction doit rester sobre. Vous pouvez admettre un résultat, à condition de le signaler très clairement. Les copies mal présentées encourent une pénalité de deux points sur vingt. **Mettez votre nom sur chaque copie**. Qu'on se le dise.

Exercice 1 : d'après HEC 1989, Option Générale, Maths 2

► Une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifie $p_{n+4} = \dfrac{1}{4}\big(p_{n+3} + p_{n+2} + p_{n+1} + p_n\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous lui associons les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations :

$$m_n = \min\big(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n\big) \qquad \text{et} \qquad M_n = \max\big(p_{n+3}, p_{n+2}, p_{n+1}, p_n\big)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q1 Prouvez que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

Q2 Établissez $m_0 \leqslant m_n \leqslant p_n \leqslant M_n \leqslant M_0$.

Q3 En déduire que les suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, et que leurs limites respectives m et M vérifient $m \leqslant M$.

Q4 Établissez la majoration $p_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m_n}{4}$.

Q5 Établissez la majoration $p_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m}{4}$.

Q6 Établissez la majoration $M_{n+4} \leqslant \dfrac{3M_n + m}{4}$.

Q7 En déduire $m = M$.

Q8 Concluez, pour ce qui concerne la convergence et la limite de la suite de terme général p_n.

Exercice 2

Q1 Soit $n \geqslant 3$. Prouvez que l'équation $e^x = x^n$ possède, dans l'intervalle $]1, e[$, une et une seule solution, que nous noterons désormais u_n.

Q2 Prouvez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge.

Q3 Déterminez la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

Q4 Donnez un équivalent *simple* de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

Tournez S.V.P.

Exercice 3 : d'après EDHEC 1994, Option Éco, Maths 2

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$. Soient $f \in \mathfrak{S}_n$ et i, j deux naturels tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Nous dirons que f *transpose* la paire $\{i,j\}$ lorsque $f(i) = j$ et $f(j) = i$.
- Notons s_n le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui ne transposent aucune paire ; en particulier, $s_1 = 1$. Par convention, $s_0 = 1$.
- Notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

Q1 Simplifiez $w_n = \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (2k-1)$.

Q2 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \dfrac{s_n}{n!}$. Calculez u_0, u_1, u_2 et u_3.

Q3 Soit $n \geqslant 2$. Exprimez en fonction de s_{n-2} le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui transposent exactement une paire.

Q4 Montrer qu'il existe des éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui transposent exactement k paires, si et seulement si $0 \leqslant k \leqslant \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$.

Q5 Prouvez que le nombre d'éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui transposent exactement k paires est $\binom{n}{2k} w_k s_{n-2k}$.

Q6 Exprimez s_n en fonction des s_j, $0 \leqslant j < n$.

Q7 En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{u_{n-2k}}{2^k k!}$.

Q8 À l'aide de cette relation, prouvez que $u_{2p+1} = u_{2p}$ pour tout naturel p.

Q9 Notons $v_p = 2^p u_{2p}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Exprimez v_p en fonction des v_j, $0 \leqslant j < p$.

Q10 Calculez v_p pour $p \in [\![0,4]\!]$, puis u_p pour $p \in [\![0,9]\!]$, et enfin s_p pour $p \in [\![0,9]\!]$.

Q11 Pour $p \geqslant 1$, établissez $u_{2p} - u_{2p-2} = \dfrac{(-1)^p}{2^p p!}$.

Q12 En déduire que les suites $(u_{4p})_{p \in \mathbb{N}}$ et $(u_{4p+2})_{p \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Q13 Prouvez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ dont vous donnerez un encadrement simple.

Q14 Donnez une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

Q15 Prouvez que $\ell = \exp\left(-\frac{1}{2}\right)$.